Разбор решения задач муниципального этапа всероссийской олимпиады по математике, 2022 год

9 класс

Общие критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Задача 1

Целые числа n и m удовлетворяют неравенствам $3n - m < 5$, $n + m > 26$, $3m - 2n < 46$. Чему может равняться $2n + m$? Укажите все возможные варианты.

***Ответ*: 36.**

***Решение.* Поскольку числа m и n целые, то и значения выражений из условия $3n - m$, $n + m$, $3m - 2n$ — тоже целые. Тогда**

$$\begin{cases} 3n - m \le 4 \\ n + m \ge 27 \\ 3m - 2n \le 45 \end{cases}$$

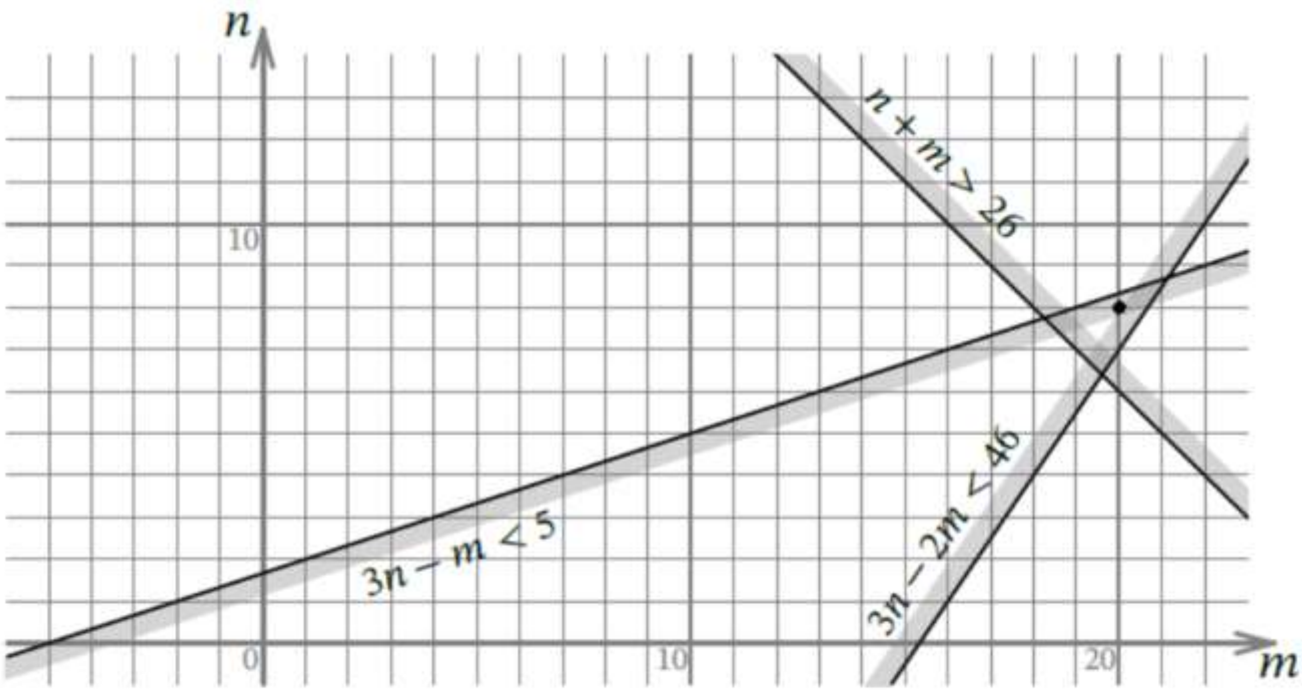
Сложив утроенное первое неравенство с третьим, получим $7n \le 57$, откуда $n \le 8$. Сложив удвоенное первое неравенство с утроенным третьим, получим $7m \le 143$, откуда $m \le 20$.

Итак, $n \le 8$, $m \le 20$, при этом $n + m \ge 27$. Это возможно только в трёх случаях.

- **$n = 7$, $m = 20$. Тогда не выполняется условие $3m - 2n \le 45$.**
- **$n = 8$, $m = 19$. Тогда не выполняется условие $3n - m \le 4$.**
- **$n = 8$, $m = 20$. Несложно видеть, что тогда все условия выполняются. Значит, $2n + m = 2 \cdot 8 + 20 = 36$.**

Продолжение задачи 1

Другое решение. **Изобразим данные неравенства как области на координатной плоскости *Omn*, как на рисунке:**



Продолжение задачи 1

Каждое из неравенств соответствует некоторой полуплоскости.

Например, неравенство $3n - m < 5$ — это полуплоскость, расположенная ниже прямой $3n - m = 5$.

Пересечением этих полуплоскостей является треугольник, внутри которого лежит одна целая точка $m = 20, n = 8$ (точки на границе треугольника не подходят, так как неравенства строгие), откуда сразу получаем единственный ответ $2n + m = 36$.

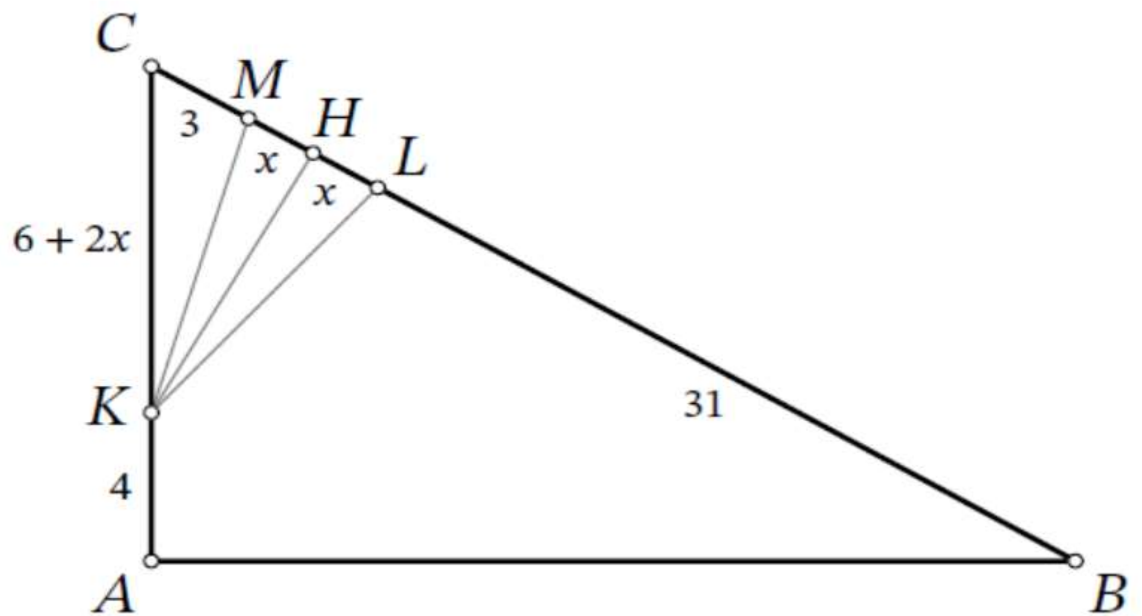
Критерий оценивания задачи 1

- Обоснованное верное решение – 7 баллов.
- Только верный ответ – 2 балла
- Составлена система неравенств, приводящая к правильному ответу - 3 балла.
- Найдено решение системы, но нет анализа решения с учетом целочисленного ответа – 5 баллов.
- Ход решения верный, но при вычислениях допущена арифметическая ошибка – вычесть 1 балл из оценки, которую бы поставили, если бы ошибки не было.

Задача 2

В треугольнике АВС известны углы $\angle B = 30^\circ$ и $\angle A = 90^\circ$. На стороне АС отмечена точка K, а на стороне BC — точки L и M так, что $KL = KM$ (точка L лежит на отрезке BM). Найти длину отрезка LM, если известно, что $AK = 4$, $BL = 31$, $MC = 3$.

Ответ: **14.**



Продолжение задачи 2

1. ***В треугольнике*** $\boldsymbol{ABC}$ ***известны углы*** $\boldsymbol{\angle B = 30^\circ}$ ***и*** $\boldsymbol{\angle A = 90^\circ}$***. На стороне AC отмечена точка K, а на стороне BC — точки L и M так, что KL = KM (точка L лежит на отрезке BM). Найти длину отрезка LM, если известно, что AK = 4, BL = 31, MC = 3.***

   Ответ: **14.**

   Решение. **В решении пользуемся известным фактом, что в прямоугольном треугольнике с углом** $\boldsymbol{30^\circ}$ **катет, лежащий против этого угла, вдвое меньше гипотенузы.**

Опустим в равнобедренном треугольнике $\boldsymbol{KML}$ **высоту** $\boldsymbol{KH}$ **на основание. Поскольку эта высота является и медианой, то** $\boldsymbol{MH = HL = x}$**. В прямоугольном треугольнике** $\boldsymbol{CKH}$ **имеем** $\boldsymbol{\angle CKH = 90^\circ - \angle C = \angle B = 30^\circ}$**, поэтому** $\boldsymbol{KC = 2 \cdot CH = 2 \cdot (CM + MH) = 2 \cdot (3 + x) = 6 + 2x}$**.**

В прямоугольном треугольнике $\boldsymbol{ABC}$ **имеем** $\boldsymbol{\angle B = 30^\circ}$**, поэтому** $\boldsymbol{BC = 2 \cdot AC}$**. Составляя и решая соответствующее уравнение** $\boldsymbol{31 + 2x + 3 = 2 \cdot (4 + 6 + 2x)}$**, находим** $\boldsymbol{x = 7}$**. Тогда** $\boldsymbol{LM = 2x = 2 \cdot 7 = 14}$**.**

Критерий оценивания задачи 2

- Обоснованное верное решение – 7 баллов.
- Только верный ответ – 2 балла
- Построен правильный чертеж и на нем отмечены все элементы, приводящие к правильному ответу - 4 балла.
- Ход решения верный, но при вычислениях допущена арифметическая ошибка – вычесть 1 балл из оценки, которую бы поставили, если бы ошибки не было.

Задача 3

Набор состоит из гирь с целочисленными массами. Известно, что если из набора убрать любую из гирь, то остальные можно разложить по двум чашкам весов так, что весы будут в равновесии. Доказать, что в наборе нечетное число гирь.

Решение. **Имеем набор из *n* натуральных чисел, выражающих массы *n* гирь из нашего набора. Если любое из этих чисел убрать, то сумма остальных чисел должна быть четным числом. Отсюда следует, что все *n* чисел имеют одинаковую четность. Если все они нечётны, то число *n* нечётное. Если все *n* чисел четные, то сократив их на наибольшую возможную степень двойки и, повторим предыдущие рассуждения для полученного нового набора, получим, что опять *n* – нечётное число.**

Критерий оценивания задачи 3

- Обоснованное верное решение – 7 баллов.
- Доказано, что веса всех гирь имеют одинаковую четность – 2 балла
- Доказано, что если веса всех гирь нечетны, то их – нечетное число – 5 баллов.

Задача 4

Решить данное уравнение с 2022 радикалами в целых числах :

$$\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots+\sqrt{x}}}}}{2022}=y$$

***Ответ*: $(0,0)$**

***Решение*. Пусть (a,b) – решение данного уравнения. После 2020 возведения в квадрат обеих частей уравнения имеем $\sqrt{a+\sqrt{a}}=m$ и после 2021 возведения в квадрат имеем $\sqrt{a}=n$, где m и n – некоторые целые числа. При этом выполнено равенство: $m^2=n(n+1)$. Если $n>0$, то должно выполняться двойное неравенство $n^2<m^2<(n+1)^2$. Отсюда $n<m<n+1$ и, следовательно, m не может быть целым числом. Значит, $n=0$ тогда $a=b=0$.**

Критерий оценивания задачи 4

- Обоснованное верное решение – 7 баллов.
- Верный ответ без решения – 2 балла
- Найден алгоритм возможного решения – последовательное возведение в квадрат обеих частей уравнения, но нет доказательства – 4 балла.

Задача 5

Известно, что a, b, c – произвольные положительные числа и $a^2 = b^2 + c^2 - bc$. Доказать, что $a + b > c$.

Решение.

$$a^2 = b^2 + c^2 - bc > b^2 + c^2 - 2bc = (b - c)^2$$

Последнее неравенство равносильно неравенству (с учетом того, что $a > 0$)

$$a > |b - c| \geq c - b$$

Отсюда $a + b > c$

Критерий оценивания задачи 5

- Обоснованное верное решение – 7 баллов.
- Получено неравенство $a^2 > (b-c)^2$ – 4 балла
- Другие алгебраические преобразования, не приводящие к решению задачи – 2 балла.