Разбор решения задач муниципального этапа всероссийской олимпиады по математике, 2022 год

8 класс

Общие критерии оценивания

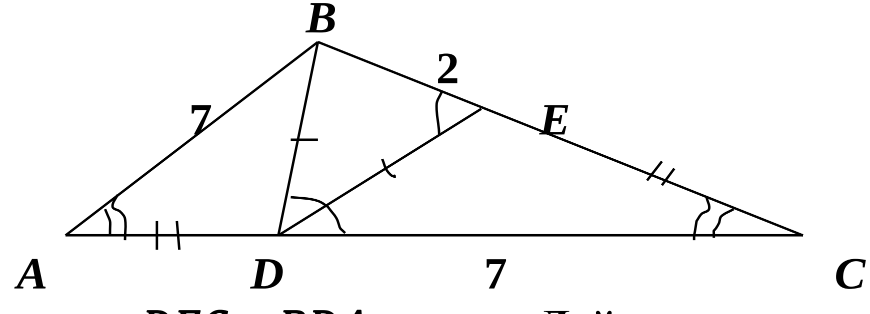
Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Задача 1

Дан произвольный треугольник ABC. Точки D и E отмечены соответственно на сторонах AC и BC треугольника ABC так, что $AD = EC$. Оказалось, что $BD = ED$, $\angle BDC = \angle DEB$. Найдите длину стороны AC, если известно, что $AB = 7$ и $BE = 2$.

Ответ: **12.**

Решение. **Сделаем чертеж, иллюстрирующий условия задачи.**



Заметим, что треугольники DEC и BDA равны. Действительно, $DE = BD$, $EC = DA$ и $\angle DEC = 180^\circ - \angle BED = 180^\circ - \angle BDC = \angle BDA$. Отсюда следует, что $DC = AB = 7$ и $\angle DCE = \angle BAD$. Из последнего равенства углов следует, что треугольник ABC является равнобедренным, $7 = AB = BC = 2 + EC$, откуда получаем $5 = EC = AD$ и $AC = AD + DC = 5 + 7 = 12$.

Критерий оценивания задачи 1

- Обоснованное верное решение – 7 баллов.
- Только верный ответ – 2 балла
- Построен правильный чертеж и на нем отмечены все элементы, приводящие к правильному ответу - 4 балла.
- Ход решения верный, но при вычислениях допущена арифметическая ошибка – вычесть 1 балл из оценки, которую бы поставили, если бы ошибки не было.

Задача 2

Решить уравнение

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} = 1$$

***Ответ*:**

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5+4\sqrt{2}}}{2\left(1+\sqrt{2}\right)}$$

***Решение.* Сначала укажем ОДЗ: $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq -1 \end{cases}$.**

Перенесем второе слагаемое в правую часть и умножим обе части уравнения на $(x+1)^2$. С учетом ОДЗ получим равносильное уравнение:

$$\left(\frac{x+1}{x}\right)^2 = (x+1)^2 + 1$$

Продолжение задачи 2

Добавим к обеим частям уравнения слагаемое $-2(x+1)$ с целью получить полный квадрат в правой части уравнения:

$$\left(\frac{x+1}{x}\right)^2 - 2(x+1) = (x+1)^2 - 2(x+1) + 1$$

или

$$\left(\frac{x+1}{x}\right)^2 - 2(x+1) = (x+1-1)^2 = x^2$$

В левой части получившегося уравнения вынесем за скобку $(x+1)$ и разделим обе части уравнения на $(x+1)$. С учетом ОДЗ получим равносильное уравнение:

$$\frac{x+1}{x^2} - 2 = \frac{x^2}{x+1}$$

Выполним замену $y = \frac{x+1}{x^2}$ и получим уравнение $y - 2 = \frac{1}{y}$.

Преобразование дает квадратное уравнение $y^2 - 2y - 1 = 0$.

Дискриминант этого уравнения $D = 8 > 0$, а корни $y_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$.

Продолжение задачи 2

Делаем обратную замену и получаем совокупность двух уравнений относительно неизвестной x:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{x+1}{x^2} = 1+\sqrt{2} \\ \frac{x+1}{x^2} = 1-\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Решение первого уравнения дает корни:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5+4\sqrt{2}}}{2\left(1+\sqrt{2}\right)}$$

Дискриминант второго уравнения $D = 5 - 4\sqrt{2} < 0$, следовательно, второе уравнение корней не имеет.

Критерий оценивания задачи 2

- Обоснованное верное решение – 7 баллов.
- Преобразования исходного уравнения привели к возможности замены $y = \frac{x+1}{x^2}$, но она не была сделана – 4 балла
- Ход решения верный, но при вычислениях допущена арифметическая ошибка – вычесть 1 балл из оценки, которую бы поставили, если бы ошибки не было.

Задача 3

Два автовладельца на заправках в течение месяца ежедневно делали одно и то же. Средняя ежедневная цена бензина за этот месяц оказалось равной 40 руб./л. Первый заливал в бак 10 литров, а второй – на 400 рублей. Кто из автовладельцев был экономнее? Другими словами, кто из автовладельцев купил бензина больше?

***Ответ*: второй**

***Решение.* Возьмем месяц, состоящий из 30 дней. Ясно, что оба автовладельца за этот месяц потратили одну и ту же сумму $40 \cdot 30 = 1200$ рублей. При этом первый купил $10 \cdot 30 = 300$ литров бензина. Сосчитаем, сколько бензина купил второй автовладелец. Если за этот месяц не было колебания цены на бензин, т.е. если бензин ежедневно продавался по цене 40р./л, то он также купил 300 литров бензина, т.к. на 400 рублей он мог ежедневно купить $400: 40 = 10$ литров. Предположим, что в какой-то день цена бензина уменьшилась на 10%, т.е. стала равной $40 \cdot 0,9 = 36$ руб./л. Тогда второй автовладелец купит на 400 рублей $400: 36 = 11\frac{1}{9}$ литра бензина.**

Продолжение задачи 3

Чтобы средняя цена за месяц осталась 40 руб./л, в некоторый другой день цена бензина должна увеличиться на 10%, т.е. стать равной $40 \cdot 1{,}1 = 44$ руб./л. Тогда второй автовладелец в этот день купит на 400 рублей $400 : 44 = 9\frac{1}{11}$ литра бензина. Найдем объем бензина, купленный вторым автовладельцем за 2 дня:

$$11\frac{1}{9} + 9\frac{1}{11} = 20\frac{20}{99}\ \text{(литра).}$$

В то же время, первый автовладелец, верный своей стратегии, купит за эти два дня 20 литров бензина. Этот объём меньше, чем объём бензина, купленный вторым автовладельцем: $20 < 20\frac{20}{99}$. Из этих рассуждений делаем вывод, что второй автовладелец экономнее первого.

Можно привести общее решение, рассматривая среднее отклонение цены от среднего значения 40 руб./л как параметр $\pm a$ руб./л. В этом случае получим теми же рассуждениями, что второй автовладелец экономнее первого.

Критерий оценивания задачи 3

- Обоснованное верное решение – 7 баллов.
- Только верный ответ – 2 балла
- Рассуждения школьника не оформлены в виде математического доказательства, но в целом правильные и дают верный ответ - 4 балла.
- Ход решения верный, но при вычислениях допущена арифметическая ошибка – вычесть 1 балл из оценки, которую бы поставили, если бы ошибки не было.

Задача 4

В классе 23 школьника – девочки и мальчики. Девочки всегда говорят правду, а мальчики всегда врут. Все ученики этого класса сели за круглый стол.

• Несколько учеников сказали: «Рядом со мной ровно один мальчик».

• Все остальные ученики сказали: «Рядом со мной ровно два мальчика».

Какое наименьшее количество мальчиков может быть в классе?

Ответ: **8.**

Решение. **Если бы по кругу нашлись три девочки подряд, средняя из них точно сказала бы неправду. Такого не может быть, поэтому среди любых трёх подряд идущих человек должен быть хотя бы один мальчик.**

Выберем произвольного мальчика. Дадим ему номер 23, а всех следующих за ним по часовой стрелке людей пронумеруем числами от 1 до 22. Поскольку в каждой из непересекающихся групп (1, 2, 3), (4, 5, 6), ..., (19, 20, 21), (22,23) есть хотя бы один мальчик, то всего мальчиков хотя бы $\frac{21}{3} + 1 = 8$**.**

Докажем, что мальчиков может быть ровно 8. Пусть ученики с номерами 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 23 — это мальчики, а ученики со всеми остальными номерами — девочки. При этом все девочки, кроме девочки с номером 22, сказали первую фразу, а девочка с номером 22 и все мальчики сказали вторую фразу. Несложно видеть, что все условия задачи выполняются.

Критерий оценивания задачи 4

- Обоснованное верное решение – 7 баллов.
- Только верный ответ – 2 балла
- Сделано умозаключение, что учеников нужно перенумеровать и что среди трех учеников с подряд идущими номерами хотя бы один мальчик - 4 балла.
- Доказано, что мальчиков не меньше, чем 8 – 5 баллов
- Ход решения верный, но при вычислениях допущена арифметическая ошибка – вычесть 1 балл из оценки, которую бы поставили, если бы ошибки не было.

Задача 5

5. **На карточках написаны числа от 1 до 2022. Какое количество карточек нужно взять наугад, чтобы среди написанных на них чисел гарантированно было число кратное 3 и число кратное 5?**
***Ответ*: необходимо взять не менее 1619 карточек**

***Решение*. Найдем минимальное количество карточек, которое необходимо взять, чтобы выполнялось заданное условие. Среди чисел от 1 до 2022 имеется 674 числа, которые делятся на 3, 404 числа, которые делятся на 5, и 134 числа, которые делятся на 15. Следовательно, среди заданных чисел 2022 − 404 − 674 + 134 = 1078 чисел, которые не делятся ни на 3, ни на 5. При этом 674 – 134 = 540 чисел делятся на 3, но не делятся на 5. Если будут взяты 1078 + 540 = 1618 числа, то среди них может не быть чисел, которые делятся на 5. А среди 1619 чисел всегда найдутся числа, которые делятся и 5 и на 3.**

Критерий оценивания задачи 5

- Только верный ответ – 2 балла
- Найдены количества чисел, делящихся на 3, делящихся на 5 и делящихся на 15 - 1 балл.
- Найдено количество чисел, не делящихся ни на 3, ни на 5 - 2 балла
- Обоснованное верное решение - 7 баллов
- Обоснованное решение, в котором допущена арифметическая ошибка при вычислениях – 6 баллов.
- Обоснованное решение, в котором неправильно найдены количество чисел, не делящихся на 3 или на 5, или на 15 – от 3 до 5 баллов.