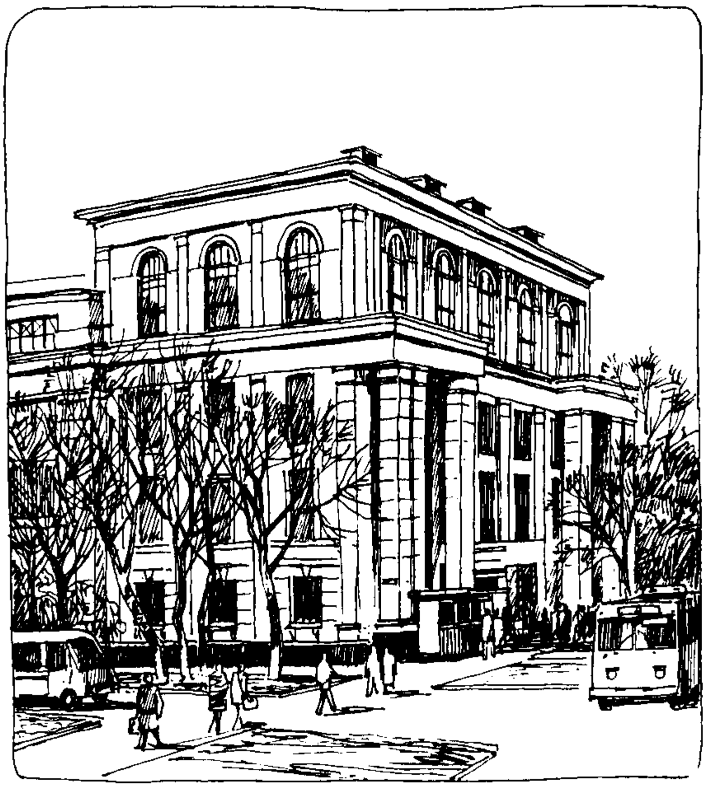
ISSN 2500-2783 (online)

ВЕСТНИК ИВАНОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия «Естественные, общественные науки»



2023

Выпуск 4

ISSN 2500-2783 (online)

ВЕСТНИК ИВАНОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия «Естественные, общественные науки»

2023. Вып. 4

Научный журнал **Издается с 2000 года**

Журнал зарегистрирован в Национальном агентстве ISSN Российской Федерации 27.05.2016 г. как электронное сетевое издание

Учредитель ФГБОУ ВО «Ивановский государственный университет»

Адрес редакции (издательства):

153025 Ивановская обл., г. Иваново,
ул. Ермака, 39, к. 462
тел./факс: (4932) 93-43-41
e-mail: publisher@ivanovo.ac.ru

Электронная копия журнала размещена
на сайтах www.elibrary.ru,
www.ivanovo.ac.ru

ISSN 2500-2783 (online)

IVANOVO STATE UNIVERSITY BULLETIN

Series «Natural, Social Sciences»

2023. Issue 4

Scientific journal **Issued since 2000**

The journal is registered at the National ISSN Agency of the Russian Federation on 27.05.2016 as an electronic online publication

Founded by Ivanovo State University

Address of the editorial office:

153025, Ivanovo region, Ivanovo,
Ermak str., 39, office 462
tel./fax: (4932) 93-43-41
e-mail: publisher@ivanovo.ac.ru

Electronic copy of the journal can be found on the web-sites www.elibrary.ru, www. ivanovo.ac.ru

СОДЕРЖАНИЕ

БИОЛОГИЯ

ПЕДАГОГИКА

ПСИХОЛОГИЯ

МАТЕМАТИКА

CONTENTS

BIOLOGY

PEDAGOGY

PSYCHOLOGY

MATHEMATICS

УДК 612.017.2

М. О. Баринова, С. В. Королева, В. Н. Зарипов, Е. С. Савичева

ОЦЕНКА ВАРИАБЕЛЬНОСТИ СЕРДЕЧНОГО РИТМА КУРСАНТОВ-СПАСАТЕЛЕЙ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ УРОВНЯ ПРЕОБЛАДАЮЩЕГО КОПИНГА

В работе представлены результаты исследования психологического и вегетативного статуса курсантов-спасателей в условиях повседневной учебной деятельности. Для оценки психологического статуса курсантов использовали методику Лазаруса, которая применяется для выявления стратегий реагирования в сложных ситуациях и позволяет определить уровень копинга. Преобладающим типом копинга у курсантов является планирование решения проблемы, который имеет средний и высокий уровень. В зависимости от уровня копинга оценивали вегетативный статус курсантов по спектральным показателям вариабельности сердечного ритма.

Ключевые слова: курсанты-спасатели, копинг-тест Лазаруса, вариабельность сердечного ритма.

M. O. Barinova, S. V. Koroleva, V. N. Zaripov, E. S. Savicheva

ASSESSMENT OF HEART RATE VARIABILITY OF CADETS-RESCUERS DEPENDING ON THE LEVEL OF DOMINANT COPING

The paper presents the results of a study of the psychological and vegetative status of cadets-rescuers in the conditions of everyday educational activities. To assess the psychological status of cadets, the Lazarus method was used, which is used to identify response strategies in difficult situations and allows you to determine the level of coping. The dominant type of coping among cadets is problem solving planning, which has an average and high level. Depending on the level of coping, the vegetative status of cadets was assessed by spectral indicators of heart rate variability.

Key words: cadets-rescuers, Lazarus coping test, heart rate variability.

В связи с повышением темпа жизни, скорости изменения социально-экономических условий, а также ростом эмоциональных, информационных нагрузок и требований к психическим ресурсам человека остро встает проблема адаптации к условиям личностно-средового взаимодействия, профилактики стресса и поддержания необходимого для успешной деятельности уровня психического и физического здоровья. Сложная многоуровневая система организации жизнедеятельности человека обеспечивает широкие возможности для приспособления к изменяющимся условиям. Способность к адаптации является неотъемлемой характеристикой человека и отражает гибкость и относительную устойчивость биопсихосоциальной системы.

Однако стресс, особенно длительно существующий, может привести к постепенному истощению адаптационных ресурсов личности и, как следствие, к нарушению психической адаптации, к срыву функциональных систем жизнедеятельности и развитию расстройств в психической и соматической сфере различной степени выраженности [3].

Экстремальные условия труда, связанные с ликвидацией последствий аварий и катастроф, оказывают существенное влияние на уровень здоровья и профессиональную надежность персонала аварийно-спасательных формирований и служб. Адаптационный потенциал организма к воздействию различных факторов окружающей среды, в том числе и к экстремальным нагрузкам, в значительной мере связан с реакциями сердечно-сосудистой системы и ее регуляторных механизмов [4, 5]. Для оценки функционального состояния организма используют методику вариабельности сердечного ритма.

При подготовке и профессиональном отборе будущих сотрудников МЧС необходимо учитывать их личностные функциональные возможности [1]. Комплексное изучение поведения курсантов, включающее определение его личностных особенностей и стратегий совладания, помогут управлять психическим состоянием, приобрести навыки и умения, связанные со снижением неприятных эмоциональных переживаний во время экстремальных ситуаций. Этой цели могут служить также индивидуальная диагностика студентов и тренинговые занятия.

Целью работы было выявление особенностей вариабельности сердечного ритма курсантов в зависимости от уровня преобладающего копинга.

Материал и методы исследования

Исследование проведено на базе ФГБОУ ВО «Ивановская пожарно-спасательная академия ГПС МЧС России», в научно-исследовательской лаборатории «Медицина катастроф». В исследовании приняли участие 30 курсантов мужского пола, возраст обследованных – 19–21 год.

Для оценки психологического статуса курсантов использовали методику Лазаруса, которая применяется для выявления стратегий реагирования в сложных ситуациях и позволяет определить уровень преобладающего копинга [2]. Оценивали следующие копинг-стратегии: «конфронтация», «дистанцирование», «самоконтроль», «поиск социальной поддержки», «принятие ответственности», «избегание проблемы», «планирование решения проблемы» и «положительная переоценка».

Вегетативный статус курсантов оценивали по показателям вариабельности сердечного ритма в условиях повседневной учебной деятельности. Проводили электрокардиографию в положении «лежа» и после функциональной нагрузки, в качестве которой было выполнение активной ортостатической пробы, в положении «стоя». По полученным записям выполняли анализ вариабельности сердечного ритма. Для проведения исследования вариабельности сердечного ритма использовали программное обеспечение и оборудование «ВНС-Микро» (ООО «Нейрософт», Россия).

В проведенном исследовании анализировали следующие спектральные показатели вариабельности сердечного ритма:

TP (Total Power), мс^2/Гц – общая мощность спектра, отражает общий запас здоровья организма;

HF (High Frequency), мс^2/Гц – мощность спектра в диапазоне быстрых высокочастотных волн, характеризует парасимпатическую активность;

LF (Low Frequency), мс^2/Гц – мощность спектра в диапазоне медленных низкочастотных волн, отражает симпатический тонус;

VLF (Very Low Frequency), мс^2/Гц – мощность спектра в диапазоне очень медленных низкочастотных волн, характеризует гуморальную регуляцию и отражает колебания метаболизма;

HF, % – доля быстрых высокочастотных волн, показывает относительную парасимпатическую активность;

LF, % – доля медленных низкочастотных волн, показывает относительную симпатическую активность;

LF/HF, у. е. – соотношение доли медленных низкочастотных и быстрых высокочастотных волн, отражает вегетативный баланс, т. е. симпатический/парасимпатический тонус;

VLF, % – доля очень медленных низкочастотных волн.

Статистическая обработка полученных данных выполнена с использованием t-критерия Стъюдента.

Условные обозначения к рисункам 3–10:

– курсанты со средним уровнем доминирующей копинг-стратегии

– курсанты с высоким уровнем доминирующей копинг-стратегии

Результаты исследования и их обсуждение

В ходе исследования было установлено, что у курсантов преобладающим типом копинга является планирование решения проблемы. Данный тип копинг-стратегии характерен для 70 % курсантов (рис. 1). Причем, ни у одного среди обследованных курсантов не было выявлено низкого уровня данной копинг-стратегии. У 60% курсантов был установлен средний уровень, у 40 % курсантов – высокий уровень доминирующей копинг-стратегии (рис. 2).

Рис. 1. Процентное соотношение количества курсантов с разными типами копинг-стратегий

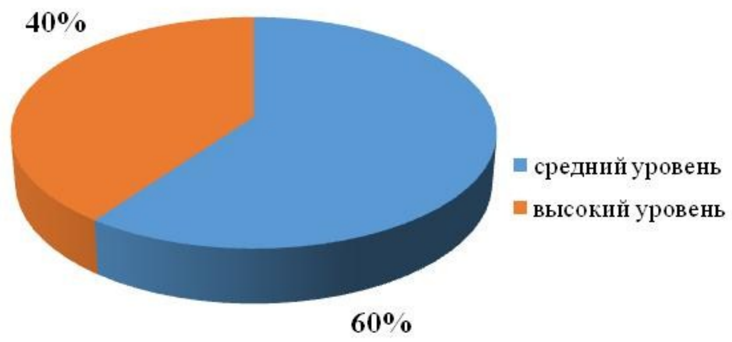


Рис. 2. Процентное соотношение количества курсантов с разным уровнем доминирующей копинг-стратегии

Общая мощность спектра (ТР, рис. 3) у курсантов со средним и высоким уровнем планирования решения проблемы одинаковая. После выполнения функциональной нагрузки данный показатель незначительно снижается в обеих группах. Это обусловлено снижением мощностей спектров в диапазонах как быстрых высокочастотных волн (HF, рис. 4), так и медленных низкочастотных волн (LF, рис. 5). Причем достоверное ($p<0,01$) уменьшение было выявлено только для мощности спектра в диапазоне быстрых высокочастотных волн. Мощность спектра в диапазоне очень медленных низкочастотных волн при этом не изменяется (VLF, рис. 6).

Общая мощность спектра отражает запас здоровья организма. Полученные данные указывают, что у курсантов под влиянием функциональной нагрузки он незначительно снижается, в основном в результате ослабления парасимпатической регуляции. Изменений в гуморальной регуляции сердечной деятельности не происходит.

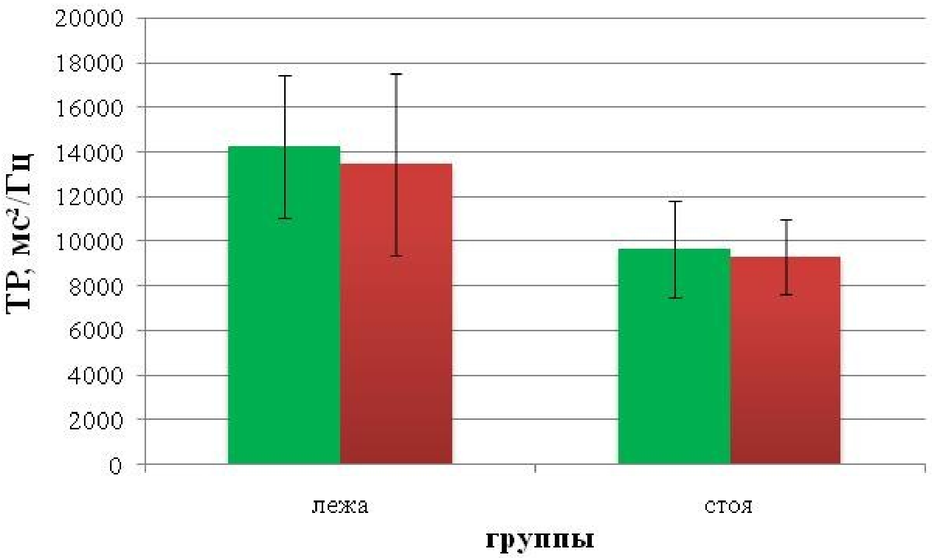


Рис. 3. Изменение общей мощности спектра у курсантов с разным уровнем доминирующей копинг-стратегии

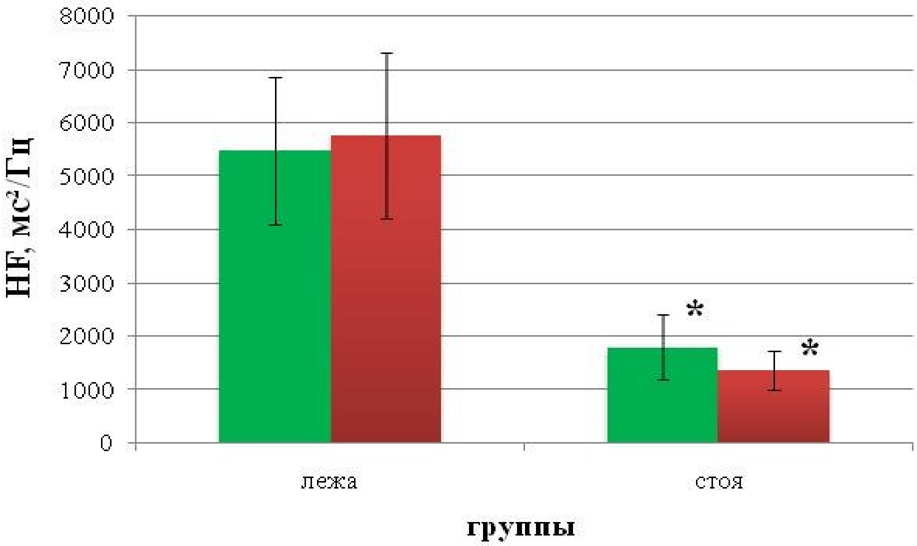


Рис. 4. Изменение мощности быстрых высокочастотных волн
у курсантов с разным уровнем доминирующей копинг-стратегии
Достоверность различий: * – лежа – стоя.

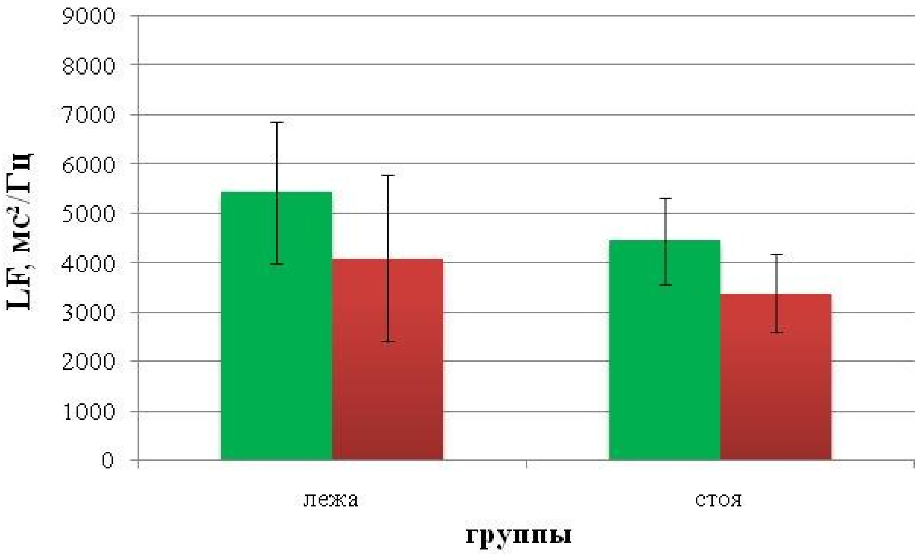


Рис. 5. Изменение мощности медленных низкочастотных волн
у курсантов с разным уровнем доминирующей копинг-стратегии

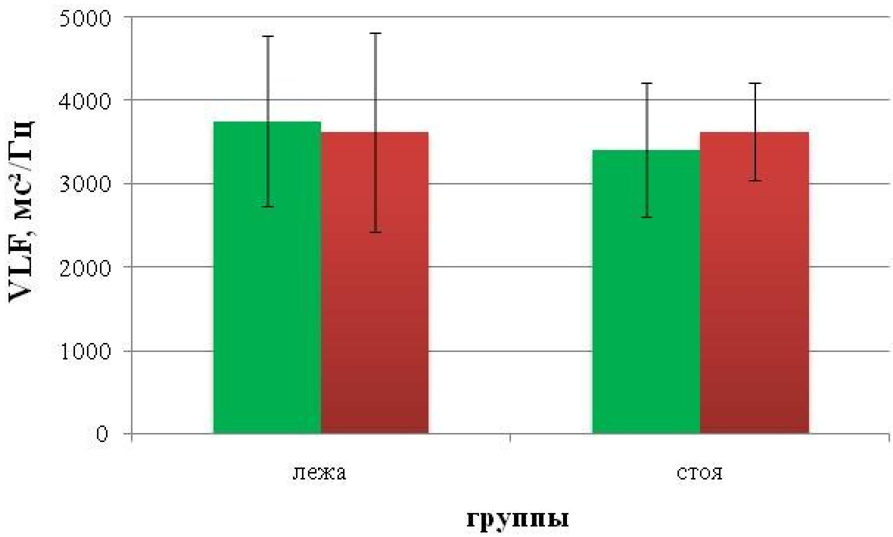


Рис. 6. Изменение мощности очень медленных низкочастотных волн у курсантов с разным уровнем доминирующей копинг-стратегии

Анализируя вклад симпатической и парасимпатической систем в регуляцию деятельности сердца, были выявлены следующие закономерности.

Доля спектра в диапазоне быстрых высокочастотных волн (%HF, рис. 7) у курсантов со средним и высоким уровнем планирования решения проблемы одинаковая. После выполнения функциональной нагрузки данный показатель достоверно ($p<0{,}001$) уменьшается в обеих группах. Это свидетельствует о снижении вклада парасимпатической системы.

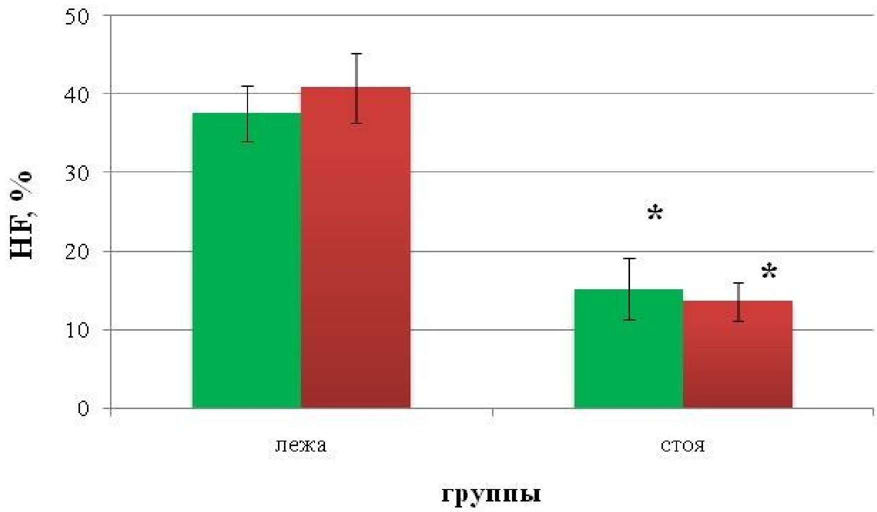


Рис. 7. Изменение доли быстрых высокочастотных волн у курсантов с разным уровнем доминирующей копинг-стратегии
Достоверность различий: * – лежа – стоя

Доля спектра в диапазоне медленных низкочастотных волн (%LF, рис. 8) у курсантов с высоким уровнем планирования решения проблемы достоверно ниже ($p<0{,}01$), чем у курсантов со средним уровнем. Данный факт указывает на меньший вклад симпатической системы в регуляцию работы сердца. После выполнения функциональной нагрузки данный показатель у курсантов с высоким уровнем достоверно ($p<0,05$) возрастает, а у курсантов со средним уровнем не изменяется. Соответственно, выполнение функциональной нагрузки курсантами с высоким уровнем сопровождается активацией симпатической нервной системы, что является адекватной реакцией на нагрузку и соответствует требованиям, предъявляемым организму.

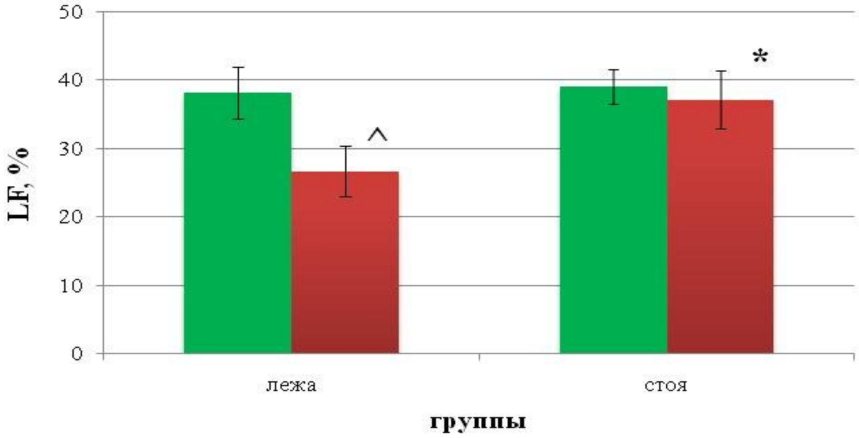


Рис. 8. Изменение доли медленных низкочастотных волн
у курсантов с разным уровнем доминирующей копинг-стратегии
Достоверность различий:
* – лежа – стоя; ^ – лежа со средним уровнем – лежа с высоким уровнем

Коэффициент LF/HF (рис. 9) у курсантов с высоким уровнем планирования решения проблемы незначительно ниже, чем у курсантов со средним уровнем. После выполнения функциональной нагрузки данный показатель у курсантов обеих групп достоверно возрастает. Это свидетельствует о смещении соотношения симпатического и парасимпатического отделов вегетативной нервной системы в сторону усиления симпатической регуляции.

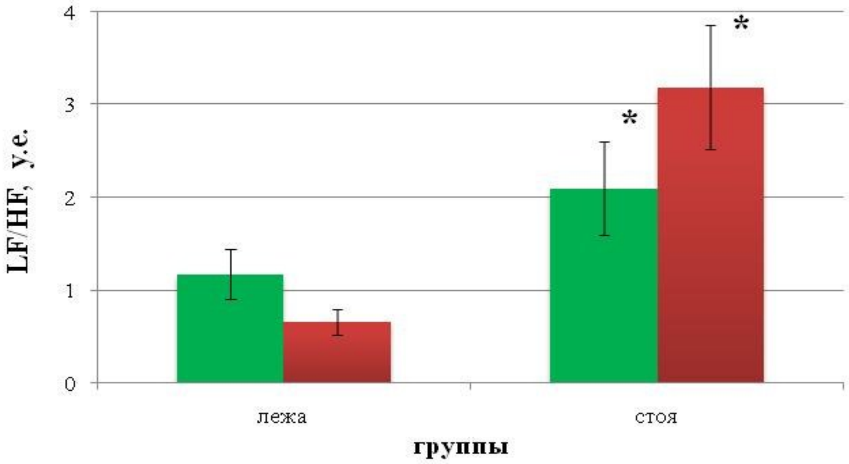


Рис. 9. Изменение соотношения долей
медленных низкочастотных и быстрых высокочастотных волн
у курсантов с разным уровнем доминирующей копинг-стратегии
Достоверность различий: * – лежа – стоя

Доля спектра в диапазоне очень медленных низкочастотных волн при этом не изменяется (%VLF, рис. 10).

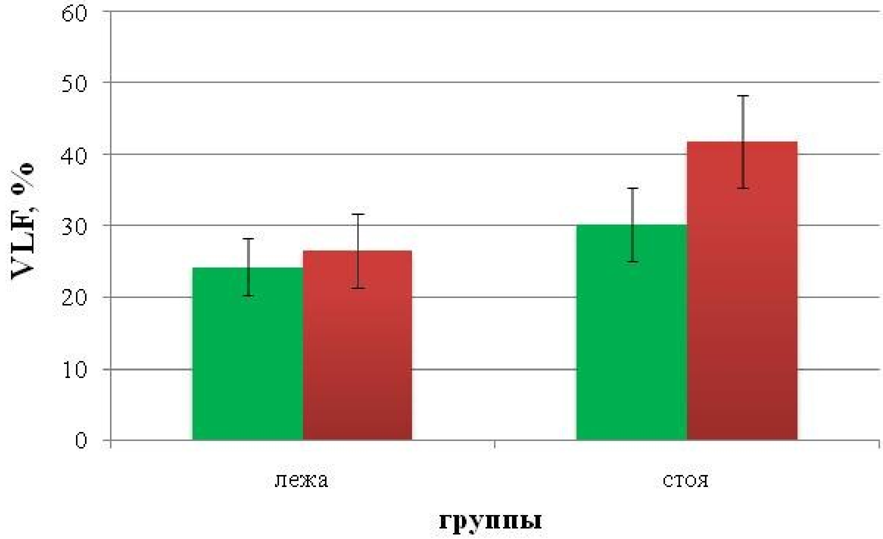


Рис. 10. Изменение доли очень медленных низкочастотных волн у курсантов с разным уровнем доминирующей копинг-стратегии

Успешность деятельности сотрудников ГПС МЧС России взаимосвязана с уровнем их копинг-поведения. Сотрудники с высоким уровнем выраженности копинг-стратегий имеют высокие экспертные оценки профессиональной успешности, соблюдают дисциплину, имеют хорошие взаимоотношения в коллективе, характеризуются хорошей эмоциональной устойчивостью. У сотрудников с уровнем копинг-стратегий, выраженным ниже среднего, профессиональная успешность немного снижена, с выполнением служебных нормативов они в основном справляются, в коллективе иногда создают конфликты, периодически допускают проявления эмоциональной неустойчивости [6].

Выводы

1. Преобладающим типом копинга у курсантов является планирование решения проблемы, который у 60 % курсантов имеет средний уровень, у 40 % курсантов – высокий уровень.

2. У курсантов со средним уровнем планирования решения проблемы в спокойном состоянии организма больший вклад в вегетативную регуляцию вносит симпатическая нервная система.

3. У курсантов с высоким уровнем планирования решения проблемы в спокойном состоянии организма вегетативный баланс смещен в сторону преобладания парасимпатической нервной системы, которая обеспечивает выполнение всех процессов на минимальном, но достаточном уровне.

4. После нагрузки, как у курсантов со средним, так и у курсантов с высоким уровнем планирования решения проблемы, происходит адекватная активация симпатической нервной системы, что необходимо для мобилизации сил организма при решении возникшей проблемы.

Библиографический список

1. *Баринова М. О., Королева С. В., Зарипов В. Н.* Особенности вариабельности сердечного ритма у курсантов-спасателей с разной степенью стрессоустойчивости // Вестник ИвГУ. 2022. Вып. 2. С. 5–13.
2. *Битюцкая Е. В.* Опросник способов копинга. М.: ИИУ МГОУ, 2015. 50 с.
3. *Исаева Е. Р.* Копинг-поведение и психологическая защита личности в условиях здоровья и болезни. СПб.: Издательство СПбГМУ, 2009. 136 с.
4. *Королева С. В.* Особенности структуры отдельных компонентов вариабельности сердечного ритма в динамике воздействия опасных факторов пожара // Современные проблемы науки и образования. 2015. № 1. (http://URL:www.science-education.ru/121-18310; дата обращения: 07.02.2023).
5. *Королева С. В., Мкртычан А. С., Петров Д. Л., Зарипов В. Н., Баринова М. О.* Совершенствование системы профотбора специалистов экстремального профиля на основе объективных медицинских технологий // IX Междунар. науч.-практ. конф. «Пожарная и аварийная безопасность». Иваново, 2014. С. 348–351.
6. *Рассказова Е. И., Гордеева Т. О., Осин Е. Н.* Копинг-стратегии в структуре деятельности и саморегуляции: психометрические характеристики и возможности применения методики COPE // Психология. Журнал высшей школы экономики. 2013. Т. 10. № 1. С. 82–118.

Информация об авторах / Information about the authors

Баринова Марина Олеговна – кандидат биологических наук, доцент, доцент кафедры биологии, Институт математики, информационных технологий и естественных наук, Ивановский государственный университет, г. Иваново, Россия, nayka@list.ru

Barinova Marina Olegovna – Candidate of Biological Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Biology, Institute of Mathematics, Information Technology and Natural Sciences, Ivanovo State University, Ivanovo, Russia, nayka@list.ru

Королева Светлана Валерьевна – доктор медицинских наук, доцент, профессор кафедры травматологии и ортопедии, Ивановская государственная медицинская академия МЗ РФ, г. Иваново, Россия, drqueen@mail.ru

Koroleva Svetlana Valeryevna – Doctor of Medical Sciences, Associate Professor, Professor of the Department of Traumatology and Orthopedics, Ivanovo State Medical Academy of the Ministry of Health of the Russian Federation, Ivanovo, Russia, drqueen@mail.ru

Зарипов Владимир Николаевич – кандидат биологических наук, доцент, доцент кафедры биологии, Институт математики, информационных технологий и естественных наук, Ивановский государственный университет, г. Иваново, Россия, zaripow@mail.ru

Zaripov Vladimir Nikolaevich – Candidate of Biological Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Biology, Institute of Mathematics, Information Technology and Natural Sciences, Ivanovo State University, Ivanovo, Russia, zaripow@mail.ru

Савичева Екатерина Сергеевна – магистр 2 курса кафедры непрерывного психолого-педагогического образования, Институт гуманитарных наук, Ивановский государственный университет, г. Иваново, Россия, ekaterina_savicheva@inbox.ru

Savicheva Ekaterina Sergeevna – 2nd year Master of the Department of Continuing Psychological and Pedagogical Education, Institute of Humanities, Ivanovo State University, Ivanovo, Russia, ekaterina_savicheva@inbox.ru

УДК 612.1; 612.8

М. О. Баринова, В. Н. Зарипов, А. М. Ермакова

ОСОБЕННОСТИ ЭЛЕКТРОЭНЦЕФАЛОГРАММ СТУДЕНТОВ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ИНДЕКСА НАПРЯЖЕНИЯ

Приводятся данные об особенностях изменений электроэнцефалографических показателей у студентов с разным индексом напряжения. У студенток с высоким индексом напряжения, по сравнению со студентками с низким и со средним индексом напряжения, выявлена более низкая биоэлектрическая активность во всех областях головного мозга, кроме лобной доли.

Ключевые слова: студентки, учебный процесс, вариабельность сердечного ритма, электроэнцефалография.

M. O. Barinova, V. N. Zaripov, A. M. Ermakova

FEATURES ELECTROENCEPHALOGRAM OF STUDENTS DEPENDING ON THE STRESS INDEX

Data on the peculiarities of changes in electroencephalographic parameters in students with different stress index are presented. Female students with a high stress index, compared with female students with a low and medium stress index, revealed lower bioelectric activity in all areas of the brain, except the frontal lobe.

Key words: girls-students, educational process, variability of a heart rhythm, electroencephalography.

Эффективность когнитивных функций в условиях современной информационной перегруженности во многом детерминируется функциональным состоянием организма человека. Индивидуальные особенности функционирования специфических мозговых структур, работу которых можно оценить по биоэлектрической активности головного мозга, определяют, насколько будет успешной умственная деятельность. Степень напряжения компенсаторных механизмов организма вполне адекватно отражает индекс напряжения регуляторных систем.

Целью данной работы было исследование особенностей биоэлектрической активности головного мозга у студентов с разным индексом напряжения.

Работа выполнена на кафедре биологии Ивановского государственного университета. В исследовании приняли участие 30 студенток в возрасте 18–20 лет, у которых провели оценку индекса напряжения (ИН) по методике Р. М. Баевского. Для этого с помощью аппаратно-программного комплекса «Поли-Спектр» (ООО «Нейрософт», Россия) регистрировали электрокардиограмму в покое в течение 5 минут с последующим компьютерным анализом полученных записей. Затем на основании индекса напряжения испытуемые были разделены на 3 группы по 10 человек в каждой: с низким ИН (10–29 у.е.), со средним ИН (30–49 у.е.) и с высоким ИН (50–70 у.е.). Студенткам каждой группы проводили электроэнцефалографию (ЭЭГ) для выявления особенностей биоэлектрической активности головного мозга с использованием аппаратно-программного комплекса «Нейрон-Спектр» (ООО «Нейрософт»,

---

Россия). Достоверность различий оценивали по t-критерию Стъюдента ($p<0,05$).

У студенток всех групп наибольшую амплитуду альфа-ритма наблюдали в затылочных долях обоих полушарий, а амплитуду дельта-ритма в лобных долях обоих полушарий. Амплитуда бета-ритма и тета-ритма была одинаковой во всех областях головного мозга. При этом, у студенток с высоким ИН регистрировали достоверно более низкие значения амплитуды альфа-ритма и бета-ритма во всех областях головного мозга левого и правого полушарий, за исключением лобной доли. Достоверно самые низкие амплитуды дельта-ритма были выявлены у студенток со средним ИН в лобных долях обоих полушарий, а кроме этого также в теменной, затылочной и височной долях правого полушария (табл.).

Независимо от индекса напряжения, у студенток в обоих полушариях мозга частоты альфа-, бета- и тета-ритмов были одинаковые, а частота дельта-ритма была меньше в лобных долях (табл.).

Известно, что индекс ЭЭГ свидетельствует о степени выраженности и времени доминирования регистрируемых ритмов [7]. Индекс альфа-ритма у студенток всех групп был самым высоким в затылочных долях, а индекс дельта-ритма в лобных долях обоих полушарий. Индекс бета-ритма и тета-ритма был одинаковым во всех областях головного мозга. При этом, у студенток с высоким ИН индекс альфа-ритма был достоверно ниже в затылочной доле обоих полушарий. Индексы бета-ритма и тета-ритма не различались у студенток с разным ИН. Индекс дельта-ритма был достоверно выше у студенток с высоким ИН в затылочной доле обоих полушарий (табл.).

В работах Л.В. Ивановой с соавт. [6] отмечается, что роль альфа-ритма состоит в своеобразной функциональной стабилизации состояний мозга и обеспечении готовности реагирования. Таким образом, меньший вклад альфа-ритма в функционирование головного мозга у студенток с высоким ИН возможно связан с более низкой готовностью к реакции на предлагаемые умственные нагрузки.

Литературные данные в отношении бета-ритма в общем сходятся в том, что увеличение доли бета-ритма связано с усилением мыслительной деятельности, причем значимое усиление бета-активности в лобных отделах связано с интенсивной когнитивной деятельностью, включающей элементы новизны [2]. Таким образом, низкие значения амплитуды бета-ритма у студенток с высоким ИН свидетельствуют о более слабой активности коры головного мозга [4, 5].

Тета-ритм тесно связан с эмоциональным и умственным напряжением [8]. Исследованиями Е.А. Умрюхина [9] показано, что повышение тета-активности в спектре электроэнцефалограммы может являться признаком готовности испытуемого к выполнению умственной деятельности, отражать рабочее напряжение и даже оптимизировать функции внимания. Таким образом, отсутствие различий в активности тета-ритма у студенток с разным ИН указывает на одинаковый уровень готовности организма к возможному выполнению мыслительных заданий.

Согласно исследованиям Н. Н. Даниловой [3], дельта-ритм у здорового взрослого человека в покое практически отсутствует, а при выполнении мыслительных заданий его амплитуда возрастает. Увеличение выраженности дельта-ритма в спектре электроэнцефалограммы происходит при снижении функциональной активности мозга и темпа психической деятельности [1]. Таким образом, больший вклад дельта-ритма в функционирование головного мозга у студенток с высоким ИН свидетельствует о сниженной активности коры головного мозга.

Таким образом, на основании анализа полученных результатов установлено, что у всех студенток, независимо от индекса напряжения, доминирует альфа-ритм в затылочных областях коры обоих полушарий головного мозга, который по амплитуде убывает от затылка в направлении к лобным долям, а по частоте симметричен в обоих полушариях. Вклад бета- и тета-ритмов в биоэлектрическую активность коры одинаковый во всех областях головного мозга. Дельта-ритм с самой низкой частотой преобладает в лобных областях коры обоих полушарий, убывая в направлении к затылочным долям. При этом, у студенток с высоким ИН отмечается более низкая биоэлектрическая активность во всех областях головного мозга, кроме лобной доли.

Показатели ритмов электроэнцефалограмм студенток в зависимости от индекса напряжения

Индекс напряжения (ИН)	ЛОБНАЯ ДОЛЯ		ТЕМЕННАЯ ДОЛЯ		ЗАТЫЛОЧНАЯ ДОЛЯ		ВИСОЧНАЯ ДОЛЯ	
	левое полушарие	правое полушарие	левое полушарие	правое полушарие	левое полушарие	правое полушарие	левое полушарие	правое полушарие
Амплитуда альфа-ритма (мкВ)								
низкий	1,46±0,13	1,48±0,12	1,77±0,14	1,79±0,18	3,38±0,37	3,37±0,32	1,51±0,17	1,62±0,13
средний	1,47±0,19	1,51±0,22	1,70±0,22	1,66±0,24	3,23±0,57	3,21±0,62	1,35±0,17	1,53±0,23
высокий	1,14±0,14	1,14±0,14	1,23±0,21*	1,26±0,19*	1,94±0,37*^	1,98±0,38*^	1,10±0,20*	1,09±0,14*
Амплитуда бета-ритма (мкВ)								
низкий	0,60±0,03	0,56±0,03	0,58±0,03	0,55±0,03	0,68±0,04	0,69±0,04	0,52±0,03	0,55±0,03
средний	0,57±0,09	0,54±0,06	0,50±0,08	0,49±0,06	0,58±0,09	0,58±0,07	0,42±0,06	0,48±0,06
высокий	0,55±0,04	0,50±0,03	0,44±0,04*	0,44±0,03*	0,53±0,05*	0,55±0,07*	0,41±0,04*	0,42±0,02*
Амплитуда тета-ритма (мкВ)								
низкий	1,99±0,16	1,93±0,15	2,05±0,22	1,96±0,13	2,16±0,18	2,16±0,18	1,67±0,15	1,75±0,10
средний	2,05±0,25	1,72±0,11	1,77±0,06	1,72±0,07	2,07±0,15	2,02±0,17	1,50±0,09	1,65±0,11
высокий	2,06±0,41	1,64±0,14	1,61±0,13	1,74±0,16	1,59±0,15	1,74±0,17	1,43±0,13	1,51±0,14
Амплитуда дельта-ритма (мкВ)								
низкий	5,10±0,41	5,36±0,58	3,80±0,63	3,95±0,58	3,45±0,20	4,18±0,57	3,02±0,24	3,92±0,58
средний	4,13±0,29*	4,27±0,20*	3,07±0,20	2,80±0,07*	3,53±0,34	3,23±0,21*	3,03±0,31	2,98±0,37*
высокий	4,63±0,49	4,79±0,59	2,91±0,11	3,60±0,53	3,06±0,24	3,84±0,56	2,88±0,15	3,33±0,54
Частота альфа-ритма (Гц)								
низкий	9,95±0,10	9,99±0,11	10,11±0,12	10,06±0,11	10,35±0,13	10,38±0,14	10,07±0,12	10,04±0,10
средний	9,93±0,22	9,87±0,22	9,82±0,19	9,78±0,19	10,20±0,25	10,22±0,24	9,80±0,21	9,75±0,22
высокий	10,06±0,14	10,08±0,16	10,23±0,18	10,21±0,17	10,45±0,20	10,45±0,18	10,25±0,16	10,30±0,19
Частота бета-ритма (Гц)								
низкий	25,50±0,44	24,58±0,52	24,71±0,26	24,19±0,48	23,83±0,24	23,52±0,31	24,74±0,28	24,36±0,43
средний	25,62±0,20	25,63±0,37	24,43±0,34	24,73±0,51	24,23±0,37	24,33±0,45	24,62±0,29	24,95±0,47
высокий	25,93±0,26	25,33±0,38	25,08±0,26	24,78±0,35	25,01±0,34	24,68±0,48	25,06±0,28	24,88±0,39
Частота тета-ритма (Гц)								
низкий	5,32±0,04	5,32±0,04	5,52±0,06	5,50±0,05	5,59±0,05	5,59±0,04	5,51±0,04	5,48±0,05
средний	5,45±0,16	5,50±0,14	5,67±0,14	5,68±0,12	5,70±0,15	5,73±0,14	5,57±0,17	5,68±0,16
высокий	5,36±0,09	5,29±0,08	5,41±0,07	5,39±0,08	5,43±0,10	5,39±0,10	5,41±0,08	5,36±0,08
Частота дельта-ритма (Гц)								
низкий	1,29±0,07	1,23±0,08	1,48±0,05	1,42±0,08	1,55±0,06	1,46±0,09	1,42±0,06	1,39±0,08
средний	1,33±0,11	1,23±0,09	1,55±0,03	1,50±0,04	1,55±0,04	1,55±0,04	1,43±0,07	1,50±0,05
высокий	1,15±0,04	1,14±0,04	1,50±0,05	1,45±0,04	1,53±0,04	1,48±0,06	1,43±0,05	1,43±0,04

Индекс напряжения (ИН)	ЛОБНАЯ ДОЛЯ		ТЕМЕННАЯ ДОЛЯ		ЗАТЫЛОЧНАЯ ДОЛЯ		ВИСОЧНАЯ ДОЛЯ	
	левое полушарие	правое полушарие	левое полушарие	правое полушарие	левое полушарие	правое полушарие	левое полушарие	правое полушарие
Индекс альфа-ритма (%)								
низкий	11,77±1,64	12,15±1,77	21,85±2,46	21,38±2,74	45,39±4,19	42,39±4,12	21,62±2,44	20,39±2,81
средний	15,00±3,98	15,00±4,00	25,50±6,05	26,17±5,86	43,50±7,50	45,33±8,16	21,17±6,28	23,50±6,09
высокий	9,13±2,74	8,88±2,73	16,25±4,20	14,75±3,90	27,75±7,22*^	24,50±6,07*^	15,13±4,06	14,63±3,80
Индекс бета-ритма (%)								
низкий	5,92±1,04	5,15±0,77	6,54±0,97	6,08±0,83	5,62±0,65	5,31±0,83	7,62±1,06	6,77±0,89
средний	5,83±1,78	5,00±1,24	5,83±1,54	6,33±1,41	4,83±1,62	4,67±1,31	5,00±1,44	6,17±1,35
высокий	5,13±0,85	4,75±1,22	5,75±1,10	4,50±0,57	5,63±0,82	5,75±0,90	6,00±1,34	5,50±0,76
Индекс тета-ритма (%)								
низкий	13,00±1,13	12,46±1,34	17,46±1,22	16,77±1,59	11,77±0,96	10,85±1,11	16,46±1,08	15,46±1,58
средний	13,17±2,17	12,33±1,36	17,17±1,85	17,50±1,48	12,33±1,76	12,17±1,85	15,33±1,84	16,67±1,86
высокий	10,25±0,75	10,50±0,80	18,25±1,36	17,38±1,43	13,25±1,61	12,88±1,36	16,13±1,26	15,88±1,27
Индекс дельта-ритма (%)								
низкий	63,62±1,93	64,62±3,10	46,62±2,74	48,31±3,94	29,62±3,33	34,31±4,18	47,00±2,29	50,15±4,21
средний	60,17±3,79	61,83±2,30	43,67±4,23	41,33±4,52	32,17±5,04	30,17±5,46	51,50±6,10	46,17±4,56
высокий	68,13±3,76	69,13±4,06	51,38±3,88	56,25±4,71	44,63±6,09*^	49,50±6,29*^	54,63±3,70	57,25±4,53

Достоверность различий: * – $p<0,05$ по сравнению с низким ИН; ^ – $p<0,05$ по сравнению со средним ИН

Библиографический список

1. *Беребин М. А., Нечаева М. А.* Электрическая активность коры головного мозга // Высшая нервная деятельность. 2005. Т. 53, вып. 1. С. 46.
2. *Гнездицкий В. В.* Обратная задача ЭЭГ и клиническая электроэнцефалография (картирование и локализация источников электрической активности мозга). М.: МЕДпресс-информ, 2004. 624 с.
3. *Данилова Н. Н.* Психофизиология. М.: Аспект Пресс, 2002. 236 с.
4. *Зарипов В. Н., Баринова М. О.* Изменения функционального состояния головного мозга студенток под влиянием умственных нагрузок различной интенсивности // Вестник ИвГУ. Иваново: ИвГУ, 2015. Вып. 1. С. 9–14.
5. *Зарипов В. Н., Баринова М. О.* Изменения электрической активности коры головного мозга у студенток с разным типом темперамента под влиянием умственных нагрузок различной интенсивности // Материалы национ. науч.-практ. конф. «Российский университет в неустойчивом мире: глобальные вызовы и национальные ответы». Иваново: ИвГУ, 2019. Ч. 2. С. 176–182.
6. *Иванова Л. В., Коробейникова И. И., Джебраилова Т. Д., Умрюхин Е. А.* Электроэнцефалографические корреляты индивидуальных различий эффективности целенаправленной деятельности студентов в экзаменационной ситуации // Журнал высшей нервной деятельности им. И. П. Павлова. 2005. С. 189.
7. *Неробкова Л. Н., Авакян Г. Г., Воронина Т. А., Авакян Г. Н.* Клиническая электроэнцефалография. Фармакоэлектроэнцефалография. М.: ГЭОТАР-Медиа, 2018. 288 с.
8. *Новикова С. И.* Ритмы ЭЭГ и когнитивные процессы // Современная зарубежная психология. Нейронауки. 2015. Т. 4, № 1. С. 91–108.
9. *Умрюхин Е. А.* Значение ЭЭГ и ее составляющих. М.: Наука, 2003. 159 с.

Информация об авторах / Information about the authors

Баринова Марина Олеговна – кандидат биологических наук, доцент кафедры биологии, Ивановский государственный университет, г. Иваново, Россия, nayka@list.ru.

Barinova Marina Olegovna – Cand. Sc. (Biology), Associate Professor of the Department of Biology, Ivanovo State University, Ivanovo, Russia, nayka@list.ru.

Зарипов Владимир Николаевич – кандидат биологических наук, доцент кафедры биологии, Ивановский государственный университет, г. Иваново, Россия, zaripow@mail.ru.

Zaripov Vladimir Nikolaevich – Cand. Sc. (Biology), Associate Professor of the Department of Biology, Ivanovo State University, Ivanovo, Russia, zaripow@mail.ru.

Ермакова Анастасия Михайловна – магистр 1 курса кафедры биологии, Ивановский государственный университет, г. Иваново, Россия, nastikermakova37@mail.ru.

Ermakova Anastasia Michailovna – Master 1 courses of the Department of Biology, Ivanovo State University, Ivanovo, Russia, nastikermakova37@mail.ru.

УДК 581.9 (470.315)

Е. А. Борисова, А. А. Курганов

РЕДКИЕ РАСТЕНИЯ ГАВРИЛОВО-ПОСАДСКОГО РАЙОНА ИВАНОВСКОЙ ОБЛАСТИ

В статье приводятся сведения о видах растений из Красной книги Ивановской области, известных на территории Гаврилово-Посадского района. К 2023 г. в районе отмечено 53 редких вида сосудистых растений и 1 вид мхов. Хаммарбия болотная (*Hammarbya paludosa*), пухонос альпийский (*Trichophorum alpinum*) и фиалка топяная (*Viola uliginosa*) известны в области только из данного муниципального района. Охарактеризованы особенности их распространения, состояние и динамика популяций.

Ключевые слова: редкие виды сосудистых растений и мхов, Красная книга, Гаврилово-Посадский район, Ивановская область.

E. A. Borisova, A. A. Kurganov

RARE PLANTS IN THE GAVRIVOVO-POSAD DISTRICT OF THE IVANOVO REGION

Data on the plant species, included into Red Data Book of the Ivanovo region and growing in the Gavrilovo-Posad municipal district are presented. There are 53 rare vascular plants species and 1 moss in the district by 2023. *Hammarbya paludosa*, *Trichophorum alpinum* and *Viola uliginosa* grow only here. Information about distribution and dynamic trends of their populations is briefly characterized.

Key words: rare vascular plant and mosses species, the Red Data Book, Gavrilovo-Posad district, Ivanovo region.

Гаврилово-Посадский район располагается на юго-западе Ивановской области (площадь – 945,27 км^2), он известен как аграрный центр региона. Этому способствуют почвенно-климатические условия района: в южной части распространены серые лесные почвы, почти половина территории относится к Владимирскому Ополью, слабо облесена. В северной части района сохранились массивы сосновых и лиственных лесов, мозаично расположены участки верховых и эвтрофных болот, имеется несколько крупных озёр. На ландшафтное и фитоценотическое разнообразие большое влияние оказывают р. Нерль – крупный приток р. Клязьмы, а также р. Ирмес – приток р. Нерли. Такие особенности территории и их сочетания приводят к большому флористическому разнообразию и уникальности флоры. По предварительным подсчётам, во флоре района насчитывается более 800 видов сосудистых растений [9]. Здесь вместе с типичными для нашей зоны бореальными и неморальными видами растений одновременно произрастают арктобореальные болотно-тундровые (*Carex paupercula*, *Trichophorum alpinum*, *Hammarbya paludosa* и др.) и лесостепные (*Seseli annuum*, *Pedicularis kaufmannii*, *Orobanche bartlingii* и др.) виды, чего не встретишь в других районах области.

Богатая флора района давно привлекает внимание ботаников. Первые научные сведения содержатся ещё в работе А. Ф. Флёрова начала XX века [10]. Растительные сообщества по Нерли с детальными геоботаническими описаниями охарактеризованы в работе ботаников 1920-х гг. [1]. В дальнейшем особое внимание уделялось изучению редких видов, работе над созданием и ведением региональной Красной книги [7]. Полученные результаты отражены в современных публикациях [3, 5, 8, 12].

В 2021 г. работы по ведению Красной книги были продолжены в рамках госконтракта с Департаментом природных ресурсов и экологии Ивановской области. Территория Гаврилово-Посадского района специально обследовалась с целью изучения состояния популяций редких видов сосудистых растений и мхов. Были совершены маршруты в окрестностях с. Иваньковский (озеро Большое Иваньковское и прилегающие лесные массивы), изучена р. Ирмес в г. Гаврилов Посад, сухие луга по р. Ирмес в окрестностях сёл Шекшово, Подолец, Давыдовское Большое и Давыдовское Малое. Ранее в 2019 г. обследовано болото Большое-Долгое, а также лесные и луговые фитоценозы по р. Нерли в окрестностях д. Новая, д. Петряиха и с. Мирславль. Полученные данные расширили и дополнили представление о флоре района в целом, а также об общем числе и особенностях распространения редких видов.

В результате полевых исследований, обобщения имеющихся гербарных материалов и литературных данных установлено, что во флоре Гаврилово-Посадского района отмечено 53 вида сосудистых растений (почти 1/3 часть от всех охраняемых в области видов) из региональной Красной книги [7], относящихся к 3 отделам, 4 классам и 24 семействам.

Особый интерес представляют редкие растения, отмеченные только в Гаврилово-Посадском районе, причём из единственного местонахождения. Это 3 вида: хаммарбия болотная (*Hammarbya paludosa*), пухонос альпийский (*Trichophorum alpinum*) и фиалка топяная (*Viola uliginosa).*

Хаммарбия болотная (семейство Орхидные – Orchidaceae), категория статуса редкости – 1. Голарктический плюризональный вид с дизъюнктивным ареалом, приуроченный к верховым болотам и приозерным сплавинам. Впервые вид был обнаружен в 2016 г. на болоте Большое-Долгое, где были описаны 2 ценопопуляции [3]. В 2019 г. находку удалось повторить, но численность особей резко сократилась, были обнаружены лишь несколько одиночных экземпляров в центральной части болота.

Пухонос альпийский (семейство семейство Осоковые – Cyperaceae), категория статуса редкости – 1. Циркумполярный арктоальпийский вид, распространенный в полярных и умеренных широтах северного полушария, очень редок в средней полосе Европейской России [7]. Впервые в регионе вид был найден в 2012 г. при мониторинговых исследованиях окрестностей озера Большое Иваньковское, на старом выработанном торфянике, поросшем молодым разреженным березняком [6]. При исследовании популяции в 2021 г. установлено, что ее площадь в целом увеличилась, вид встречался плотными и рыхлыми группами, растения хорошо плодоносили. Была отмечена низкорослость особей по сравнению с 2012 г., вероятно, из-за недостатка осадков в мае-августе 2021 г.

Фиалка топяная (семейство Фиалковые – Violaceae), категория статуса редкости – 0. Европейский бореальный лесо-болотный вид, распространен в России в лесной зоне европейской части, в основном в нечерноземной полосе, в Ивановской области находится северной границе ареала [7]. Обычно вид встречается в прирусловой части пойм рек, по болотистым лугам, на окраинах болот. Фиалка топяная отмечалась у д. Уронда Малая в 1923 г. (сборы Н. Козулина, хранятся в фондах областного краеведческого музея). Приводится в работе А. А. Хорошкова как редкий вид [11]. Повторить данную находку вида пока не удается.

12 видов, произрастающих на территории Гаврилово-Посадского района, относятся к очень редким для флоры Ивановской области в целом, они известны всего из нескольких местонахождений. Это, например, неморальные злаки – коротконожка лесная (*Brachypodium sylvaticum*) и кострец Бенекена (*Bromopsis benekenii*), блисмус сжатый (*Blysmus compressus*) – лугово-болотный вид ключевых местообитаний. Эти виды отмечались в 1920-х гг., с тех пор их находки пока не повторены. Турча болотная (*Hottonia palustris*) в 1990-х обнаружена в заводях р. Нерли; осока бедненькая (*Carex paupercula*) формирует самую крупную в области популяцию на болоте Большое-Долгое; белокопытник холодный (*Petasites frigidus*), осока двудомная (*Carex dioica*) и берёза приземистая (*Betula humilis*) приурочены к комплексам минеротрофных болот; овсик извилистый (*Avenella flexuosa*) и горошек кашубский (*Vicia cassubica*) небольшими группами встречаются в спелых сосняках северной и центральной части района. Змееголовник Рюйша (*Dracocephalum ruyschiana*) – редкий лесостепной вид, отмечен на сухих лугах в 3 пунктах района. Численность популяции тростянки овсяницевидной (*Scolochloa festucacea*) сокращается, при специальных исследованиях берегов озер Большое Иваньковское и Большое Шестовское в 2021 г. повторить находки вида не удалось.

На флору района большое влияние оказывает река Нерль, способствуя проникновению и распространению луговых лесостепных и пойменных видов [1, 8]. К таким типичным видам комплекса долины р. Нерли, формирующим устойчивые популяции, относятся тимофеевка степная (*Phleum phleoides*), гвоздика Фишера (*Dianthus fischeri*), живокость высокая (*Delphinium elatum*), мытник Кауфмана (*Pedicularis kaufmannii*), гулявник высокий (*Sisymbrium strictissimum*), которые отмечаются регулярно. Из этой группы видов пока не удаётся повторить находки келерии Делявиня (*Koeleria delavignei*).

Другие редкие виды Гаврилово-Посадского района в области известны из многих местонахождений. Это горечавка лёгочная (*Gentiana pneumonanthe*), герань болотная (*Geranium palustre*), зимолюбка зонтичная (*Chimaphila umbellata*), одноцветка крупноцветковая (*Moneses uniflora*), грушанка зеленоцветковая (*Pyrola chlorantha*), трищетинник сибирский (*Trisetum sibiricum*), ивы лопарская (*Salix lapponum*) и черниковидная (*S. myrtilloides*), прострел раскрытый (*Pulsatilla patens*), мытник скипетровидный (*Pedicularis sceptrum-carolinum*), гудайера ползучая (*Goodyera repens*), пальчатокоренник пятнистый (*Dactylorhiza maculata*), осоки плетевидная (*Carex chordorrhiza*) и прямоколосая (*C. atherodes*), пушица стройная (*Eriophorum gracile*), пузырчатка малая (*Utricularia minor*), крестовник приречный (*Senecio fluviatilis*), посконник коноплевидный (*Eupatorium cannabinum*), фиалка холмовая (*Viola collina*), рдест длинненйший (*Potamogeton praelongus*), кровохлёбка лекарственная (*Sanguisorba officinalis*).

Из отдела папоротниковидные А. Ф. Флёровым [10] отмечался гроздовник полулунный (*Botrychium lunaria*). В заболоченных лесах близ озера Большое Иваньковское и с. Иваньковский на выработанных торфяниках небольшими группами встречается плаун – баранец обыкновенный (*Huperzia selago*).

Из листостебельных мхов в районе обнаружен редкий вид – гелодиум Бландова – *Helodium blandowii*. Он найден в переходных участках болота Большое-Долгое, где встречается небольшими группами.

Из-за изменения режима природопользования, смены форм хозяйствования и уничтожения местообитаний в районе, вероятно, исчезли 2 редких вида – горечавка горьковатая (*Gentiana amarella*), которая уже более 80 лет не отмечается также и в других районах области. Камнеломка козлёнок (*Saxifraga hirculus*) находится в области на грани исчезновения, сведения о произрастании вида в топких березняковых болотах по берегам озера Большое Иваньковское приводятся А. Ф. Флеровым [10].

Благодаря флористическим исследованиям в рамках программы по ведению Красной книги на территории Гаврилово-Посадского района были найдены очень редкие в Ивановской области лесостепные виды, которые пока не включены в основной список и нуждаются в уточнении распространения и динамики популяций. Это заразиха Бартлинга (*Orobanche bartlingii*), обнаруженная на лугах по берегам р. Нерли близ д. Новая и с. Мирславль [2], а также отмеченные в 2021 г. на сухих лугах по берегам р. Ирмес жабрица однолетняя (*Seseli annuum*) близ с. Давыдовское Большое и герань кроваво-красная (*Geranium sanguineum*), найденная у с. Подолец [4].

Выявление новых местонахождений редких видов в районе, мониторинг состояния их популяций, а также подтверждение известных находок, в том числе, сделанных в конце XIX – начале XX в. – важные задачи работ по ведению Красной книги, которые будут продолжены. Сохранение редких видов растений и мест их обитания продолжает оставаться глобальной природоохранной проблемой.

Библиографический список

1. *Антипин Н. А., Пчелкин В. М.* Заливные луга по р. Нерли // Труды Иваново-Вознесенского губернского научного общества краеведения. 1929. Вып. 6. С. 7–57.
2. *Борисова Е. А., Курганов А. А.* О находке Orobanche bartlingii Griseb. (Orobanchaceae) в Ивановской области // Бюллетень МОИП. Отд. Биол. 2020. Т. 125, № 3. С. 41–42.
3. *Борисова Е. А., Курганов А. А., Шилов М. П.* Находки новых и редких видов сосудистых растений в Ивановской области // Ботанический журнал. 2017. Т. 102, № 11. С. 1563–1570.
4. *Борисова Е. А., Курганов А. А., Виноградова Ю. С., Конотоп Н. К.* Новые для флоры Ивановской области таксоны сосудистых растений // Ботанический журнал. 2022. Т. 107, № 8. С. 809–813.
5. *Борисова Е. А., Курганов А. А., Мишагина Д. А., Шилов М. П.* Интересные флористические находки, сделанные летом 2012 года // Актуальные проблемы изучения и сохранения биоразнообразия Верхневолжья: материалы межрегиональной науч.-практ. конф., посвященной 35-летию кафедры общей биологии и ботаники и ботанического сада ИвГУ. Иваново: Иван. гос. ун-т, 2012. С. 12–17.
6. *Борисова Е. А., Шилов М. П.* О находке *Trichophorum alpinum* (L.) Pers. (*Cyperaceae*) в Ивановской области // Бюллетень МОИП. Отд. Биол. 2013. Т. 118, вып. 6. С. 61.
7. Красная книга Ивановской области. Т. 2: Растения и грибы. Изд. 2-е / под ред. Е. А. Борисовой (подразделы «Сосудистые растения», «Мохообразные» раздела

«Растения»), Л. Ю. Минеевой (подраздел «Пресноводные водоросли» раздела «Растения», раздел «Грибы»). Тамбов: ООО «ТПС», 2020. 256 с.
8. *Курганов А. А.* Флора долины реки Нерль Ивановской области // Научный поиск. 2014. № 2.7. С. 14–17.
9. Список сосудистых растений Ивановской области / А. В. Щербаков, Н. В. Любезнова, Е. А. Борисова, А. А. Курганов, М. П. Шилов. М.: ООО «Галлея-Принт», 2022. 73 с.
10. *Флёров А. Ф.* Флора Владимирской губернии // Труды общества естествоиспытателей при императорском Юрьевском ун-те. 1902. Т. 10. С. 3–338.
11. *Хорошков А. А.* Материалы для флоры Иваново-Вознесенской губернии // Бюллетень МОИП. Отд. Биол. 1925. Т 33, вып. 3/4. С. 244–257.
12. *Шилов М. П.* Ботанические находки в Гаврилово-Посадской районе Ивановской области // Флористические исследования в Центральной России на рубеже веков. Материалы научного совещания. М., 2001. С. 160–162.

Информация об авторах / Information about the authors

Борисова Елена Анатольевна – доктор биологических наук, зав. кафедрой биологии, Ивановский государственный университет, г. Иваново, Россия, floraea@mail.ru

Borisova Elena Anatolyevna – Doctor of Biological Sciences, Head of the Department of Biology, Ivanovo State University, Ivanovo, Russia, floraea@mail.ru

Курганов Антон Александрович – кандидат биологических наук, доцент кафедры биологии, Ивановский государственный университет, г. Иваново, Россия, 07011991@mail.ru

Kurganov Anton Aleksandrovich – Candidate of Biological Sciences, Associate Professor of the Department of Biology, Ivanovo State University, Ivanovo, Russia, 07011991@mail.ru

УДК 372.851

С. Р. Когаловский

О ТЕМЕ «КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ» В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Осваиваемые школьниками средства знаковой системы алгебры становятся для них средствами зримого представления изучаемых ситуаций, усмотрения и реализации в свернутом виде эффективных способов их исследования и преобразований самих этих способов. Несомые ею средства становятся и средствами настройки мышления на те или иные направления и формы деятельности и на отвечающие им тактики внимания. Использование таких средств – это выход на метапредметный уровень, позволяющий усматривать и эффективно использовать продуктивные приемы и методы математической деятельности. Оно рождает качественно новые исследовательские возможности. Исследуется вопрос о том, какими должны быть способы освоения этих средств, открывающие возможность полнокровной реализации их огромного потенциала. Рассмотрения проводятся на примере темы «Квадратные уравнения». Они показывают, что осуществление описываемого подхода к обучению математике несет преобразование содержания этой темы и ее духа.

Ключевые слова: знаковый язык алгебры, орудия математической деятельности, редукционистская установка, иерархическая система математических знаний, гетерархическая система математических знаний, рациональные и внерациональные механизмы мышления, от квадратных уравнений к алгебраическим уравнениям.

S. R. Kogalovskii

ON THE TOPIC "QUADRATIC EQUATIONS" IN THE SCHOOL MATHEMATICS COURSE

The means of the sign system of algebra mastered by schoolchildren become for them means of a visible representation of the studied situations, discretion and implementation in a collapsed form of effective methods of their research and transformations of these methods themselves. The means that he carries also become means of adjusting thinking to certain directions and forms of activity and to the tactics of attention corresponding to them. The use of such means is an exit to the meta-subject level, which allows you to see and effectively use general techniques and methods of mathematical activity. It gives rise to qualitatively new research opportunities. The question of what should be the ways of mastering these funds, which open up the possibility of greater realization of their enormous potential, is being investigated. The reviews are conducted on the example of the topic "Quadratic equations". They show that the introduction of the described approach to teaching mathematics entails a transformation of both the content of this topic and its spirit.

Key words: the sign language of algebra, tools of mathematical activity, reductionist attitude, hierarchical system of mathematical knowledge, heterarchical system of mathematical knowledge, rational and non-rational mechanisms of thinking, from quadratic equations to algebraic equations.

Знаковое «замещение» даже в элементарной математической деятельности, использующее веками формировавшуюся знаковую систему алгебры, – это далеко не просто замещение, не просто обращение к более эффективной форме ее осуществления. Это ее преображение, несомое продуктивным моделированием не только исследуемого предмета, но и самой деятельности. (Ведь продуктивная модель объекта – это, прежде всего, модель продуктивной стратегии его исследования). Это восхождение на метапредметный уровень, несущее возможность усмотрения и эффективного использования продуктивных приемов и методов математической деятельности. Оно рождает качественно новые исследовательские возможности. Оно активизирует работу глубинных уровней мышления, а с ними – надрациональных ее уровней и становится подобным геологической разведке, совершаемой из космоса.

Едва ли возможно более выразительно представить роли знаковых средств, знакового моделирования в математической деятельности, открываемые им возможности, чем словами Гуссерля [3, с. 224–225]: «*Если сообразить, ... как узка та сфера, внутри которой находятся еще вполне доступные пониманию усложнения абстрактных понятий, и как трудно даже одно только понимание таких своеобразно сочетающихся усложнений, если рассудить, как мы… ограничены в самом уразумении смысла умеренно сложных связей между положениями и еще более – в действительном и самоочевидном осуществлении даже умеренно сложных дедукций, наконец, если принять во внимание, как ничтожна a fortiori сфера, в которой может первоначально вращаться активное, вполне ясное, повсюду борющееся с самой мыслью исследование… то надо изумляться, как вообще могли создаться более обширные рациональные теории и науки... Проблема состоит в том, как возможны математические дисциплины, в которых с величайшей свободой движутся не относительно простые мысли, а целые груды мыслей и тысячекратно переплетенные друг с другом связи мыслей, и где исследование создает все усложняющиеся их сочетания. Это делают искусство и метод. Они преодолевают несовершенство нашей духовной организации и позволяют… посредством символических процессов при отсутствии наглядности, прямого уразумения и очевидности выводить результаты, которые вполне верны, ибо… гарантированы общим обоснованием правильности метода… Это широкое сведение самоочевидных процессов мышления на механические… покоится на психологической природе знаково-символического мышления*».

В. С. Библер выделил следующие основные особенности мысленного эксперимента <являющегося необходимым компонентом исследовательской деятельности>: 1) предмет познания мысленно перемещается в такие условия, в которых его сущность может раскрыться с особой определенностью, 2) этот предмет становится объектом последующих мысленных трансформаций, 3) в этом же эксперименте мысленно формируется та среда, та система связей, в которую помещается этот предмет… Лишь в этой особой среде и находит свое раскрытие его содержание (см.: [14, с. 200])[1]. Овнешняя мысленный эксперимент в математической деятельности, знаковое «замещение» превращает его в существенно большее, чем просто эксперимент. Оно превращает в предмет исследования и цель эксперимента, и сам процесс его

[1] Цит. по: [4, с. 62–63].

осуществления. Более того, оно превращает в предмет исследования выбор формы эксперимента и открывает для этого широкие возможности. Все это превращает мысленный эксперимент в сплав предметной и метапредметной деятельности. Все это делает предметом такой деятельности и метапредметную деятельность по отношению к самому эксперименту. С другой стороны, такая деятельность, являющаяся преимущественно теоретической, становится эмпирической по отношению к используемым в ней знаковым формам.

Освоение общего метода – это процесс накопления опыта его использования в разнообразных ситуациях. Это процесс, вбирающий в себя все более широкий круг особенных и единичных ситуаций и направленный на поиск их преобразований в такие формы, которые делали бы возможным применение к ним этого метода. Это процесс развития процедур его использования, процесс формирования и развития отвечающих этому методу умений и навыков. Это процесс развития координации действий, ведущей к кристаллизации «стандартных блоков» операций и действий и их свертыванию, к превращению их в элементарные, «атомарные» действия и тем способствует овладению более сложными и более масштабными формами поисково-исследовательской деятельности. Такой процесс не осуществим без укорененности в нем знаковых средств, без их ведущей роли.

Уже начальное овладение языком алгебры открывает возможность выражать общие формы арифметических задач и общие формы их решения и делать сами эти общие формы предметом исследования, а тем самым восходить на теоретический уровень мышления. Это способствует превращению алгебраических знаковых выражений в «иконические» знаки исследуемых ситуаций и логики их преобразований, в их подобия, в их «фотокопии» и тем несет развитие метапредметного уровня мышления, а с ним возрастание его дальновидения и дальнодействия. Это формируется «критической массой» разнообразия и уровней сложности упражнений и решаемых задач, их направленностью на восхождения на метапредметные уровни. Это формируется развивающимися активными взаимодействиями меонального и эйдетического начал.

Уже начало изучения алгебры как восхождение к надпредметному уровню в арифметике должно быть для учащихся началом осознания знаковых средств алгебры как несущих высвечивание скрытых арифметических отношений, приемов, методов, использование которых не только делает арифметическую деятельность более эффективной, но преображает ее. Оно открывает широкие возможности воплощения принципов *от общего – к частному* и *от неразвитого целого к развивающемуся и преображающемуся целому*[2]. Знаковая система алгебры несет возможность свернутых описаний арифметических отношений и свернутого осуществления их преобразований. Она открывает возможность работы с такими выражениями как с целостностями и тем самым несет возможность далеко идущего развития постановок задач и методов их решения.

Обучение математике, направленное на полнокровное освоение ее знаковых средств, не может не предполагать широко используемые выходы на метапредметные уровни по отношению и к самим знаковым средствам. Это предотвращает вырождение обучения математике в одномерное «техни-

[2] См.: [5].

ческое» обучение и откроет возможности превращения обучения в освоение развивающегося живого знания, в развивающее обучение.

Освоение учащимися знаковой системы алгебры несет формирование привычки настраивать внимание на восприятие исследуемой ситуации в целом, формирование способности к такому восприятию, способности схватывать, выражать, использовать и преобразовывать структуру целого, способности, являющейся важным компонентом математической и общей интеллектуальной культуры. Овладение этими знаковыми средствами помогает и лучше усматривать особенное в исследуемых ситуациях, находить подходы к нему, эффективно сообразующиеся с подходом к общему, и подходы к общему, эффективно сообразующиеся с особенным. Способствуя превращению знаковых выражений в зримые представления исследуемых ситуаций, оно способствует превращению их в средства усмотрения эффективных путей их преобразования, в средства преобразования самих способов исследования. Эти знаковые средства являются и эффективными средствами настройки мышления на те или иные направления и формы деятельности, на отвечающие им тактики внимания.

Использование языка алгебры несет немалые возможности и для исследований в области психологии математического мышления и для педагогики математики посредством несомого им овнешнения работы внутренних механизмов математической деятельности. Но все же такое использование – это во многом использование метода черного ящика. Оно не позволяет постигать глубинные механизмы мышления, механизмы поисково-исследовательской деятельности, механизмы формирования и развития понимания. Как показывают классические исследования Н. А. Бернштейна, живое движение осуществляется в условиях большого числа «степеней свободы». Отсюда – сложность его описания. В несравненно большей степени это относится к работе механизмов мышления. Чем сложнее такая деятельность, тем меньше возможность рационального ее описания, выявления ее внутренней логики, представляющей собой продукт взаимодействия многих логик, и языки, формируемые с целью ее постижения, – это языки описания лишь «внешних» ее форм. Поэтому ни обучение сложным формам интеллектуальной деятельности, ни их освоение не должно предполагать их понимание. И поэтому жестко детерминированный, жестко регламентированный процесс обучения сложным формам интеллектуальной деятельности невозможен, то есть в деле их освоения не может быть *обучаемых*, а могут быть только *учащиеся*. И потому особую значимость обретают проблемы разработки продуктивных *стратегий* учебной деятельности [5] (см. также [6]).

Даже только семиотический план, только «*прочтение*» достаточно простого знакового выражения – это сложный процесс взаимодействий разнонаправленных и разноуровневых тактик внимания, отвечающих синтаксическому, семантическому и прагматическому планам[3] (не говоря уже о

---

[3] См., например, [12]. См. также работы [13, с. 41–44] и [15], помогающие приоткрытию этой сложности даже в элементарной математической деятельности. Уже начальный уровень овладения ребенком языком арифметики требует такого способа, с помощью которого «*одни и те же объекты выступают как объекты трех разных систем: отношения равенства, отношения “целое – части” и счета… Это требует такой учебной задачи, которая обеспечивает введение трех типов моделей и операций с ними (модели “целое – части”, модели отношения равенства, модели объекта*

формировании такого выражения как выражения условия задачи). Но намного сложнее поиск и осуществление цепочек преобразований знаковых выражений, ведущих к осуществлениям широкого разнообразия ставящихся целей. За высокой продуктивностью процессов использования этих знаковых средств скрывается высокая сложность процессов их освоения, их многоступенность. Освоение таких процессов требует рутинной работы, состоящей в многократных осуществлениях тех или иных действий, приводящих к свертыванию этих действий, к «превращению» этих действий в действия элементарные и тем открывающих возможность осваивать более сложные действия. Это несет развитие дальновидения и «дальнодействия» мышления, а с ними возможность освоения более сложных форм математической деятельности[4].

Способы освоения знаковых средств алгебры как продуктивных средств поисково-исследовательской деятельности, как средств развития рефлексии не могут состоять в выстраивании процесса обучения как процесса последовательного усвоения элементарных действий[5]. Неуклонное следование методу *от простого к сложному,* следование ему как принципу – это впадение в редукционизм, убивающий возможность развивающего обучения. Оно убивает возможность полнокровного освоения этих средств, достижимого не отказом от этого метода, а его сочетаниями, его взаимодействиями с методом *от сложного к простому*. Последнее не реализуемо без широкого использования задач, называемых в педагогическом обиходе нестандартными задачами. Такие задачи не могут не быть «стандартным» средством обучения. Освоение знаковых средств алгебры как эффективных орудий математической деятельности не осуществимо без достижения «критической массы» опыта решения широкого многообразия разноуровневых и разнонаправленных задач. Только тогда опыт знаковой деятельности обретает знаково-деятельностную форму. Только тогда обретаемое знание становится деятельностным знанием, живым знанием. В немалой степени этому способствуют выходы за пределы изучаемого круга вопросов посредством продуктивных обобщений задач, относящихся к этим

пересчета – "линеечка") и построение такого особого действия, включающего эти три типа объектов и операций, причем таким образом, чтобы одни и те же объекты использовались... во всех этих трех значениях», так как «арифметическая формула является примером специфического знакового замещения, которое... всегда фиксирует синтез разного типа содержаний» [15, с. 377].

[4] Такому развитию в немалой степени способствовали широко применявшиеся несколько десятков лет назад задачи на упрощение сложных алгебраических выражений. Отказ от них привел к весьма ощутимым потерям в уровне математической подготовки школьников, которые едва ли возможно возместить новшествами стратегического характера (см. также [10]).

[5] «*Сложные образования и процессы разлагались* <рядом исследователей> *на составные элементы и переставали существовать как целые, как структуры. Они сводились к процессам более элементарного порядка, занимающим подчиненное положение... Как организм, разложенный на составные элементы, обнаруживает свой состав, но уже не обнаруживает специфически органичных свойств и закономерностей, так и эти сложные и целостные психические образования теряли свое основное качество, переставали быть самими собой при сведении их к процессам более элементарного порядка*» [2, с. 7]. Эти слова выдающегося зачинателя системного подхода в психологии актуальны и сегодня, как актуальна и проблема преодоления неуклонного следования в обучении принципу *от простого к сложному,* проблема преодоления господства редукционизма в педагогике математики.

вопросам. Конечно, можно изобрести сколько угодно содержательных, разноуровневых и разнонаправленных задач, относящихся к изучаемой теме, какой бы узкой она ни была. Такие возможности содержатся уже в орудиях мышления, несущих восхождения на метапредметные уровни. Но то значимое общее, которое несут рассмотрения таких задач, предстает в глазах учащихся как привязанное к рассматриваемой теме, как выражающее особенности ее предмета, а не как общее (относящееся, в частности, и к этой теме). К тому же освоение общего как общего требует и работы с ним в адекватных ему общих рамках. Оно требует и развития отвечающих ему координаций действий.

В процессе изучения математики происходят многоступенные преображения внутренних форм знаний учащегося. Изменяются отношения между освоенными понятиями, рождаются новые понятия, становящиеся и предметами, и орудиями поисково-исследовательской деятельности, изменяются взаимодействия между орудиями поисково-исследовательской деятельности, формируются новые ее орудия, становящиеся предметами изучения, что приводит к рождению новых понятий, представляющих эти предметы. Это приводит к изменениям отношений между понятиями предметного и метапредметного уровней, к «возведениям» на метапредметный уровень понятий предметного уровня и «низведениям» понятий метапредметного уровня на предметный уровень. Процесс освоения математических знаний – это процесс развивающихся активных взаимодействий меонального и эйдетического начал.

Математические знания не отделимы от умений и навыков. Их предмет – это *Метод*, а значит, *сама математическая деятельность*. Продукты их *о*своения (в отличие от *у*своения) – это не новые понятия «сами по себе», не новые теоремы «сами по себе», не новые приемы решения того или иного вида задач «сами по себе», не какие-либо иные творческие продукты математической деятельности «сами по себе», а обретаемые через их освоение, посредством их освоения способности к новым уровням, формам и направлениям математической деятельности, к ее обогащениям и преобразованиям, несомым этими творческими продуктами. Это развитие ориентировки и метаориентировки учащихся. Это развитие их метакогнитивных способностей, несущее не только общематематическое, но и общее интеллектуальное развитие, проявляющееся и как развитие метапредметных уровней математической деятельности, как рождение или освоение новых понятий, представляющих новые планы, новые стратегии метапредметной деятельности. И это является наиболее ценным продуктом освоения тех или иных математических знаний. Математическая деятельность, выступающая в форме знаковой деятельности, в значительной, в решающей степени способствует такому ее освоению.

Развивающаяся система математических знаний имеет не столько *иерархический* характер, сколько *гетерархический*, характеризуемый не столько управлением и подчинением, сколько координациями, не столько фиксированными родовидовыми отношениями, сколько их превращениями. В таких системах обычно бывает невозможно выделить какой-нибудь один определенный «центр», из которого осуществлялось бы управление всей системой как при иерархическом подходе. Вместо этого управление внутренними процессами и взаимодействием с окружением осуществляется по типу гетерархического объединения иерархий, тесно связанных друг с другом, но не имеющих фиксированного центра управления [1, с. 150]. (В мышлении ребенка синкретами и комплексами усматриваются начальные проявления следования гетерархическому принципу).

Если термин «иерархия» означает высокую степень организации всей системы вокруг единого центра и статичность ее структуры, то термин «гетерархия» указывает не на дезорганизованность как альтернативу организации, но на существенно иной тип организации. Ни один уровень гетерархии не может быть полностью описан с точки зрения другого уровня или сведен к метасистеме. Да и за монолитностью иерархической системы познавательного опыта находится гетерархия, создающая многомерность и необходимую для жизнеспособности сложность [18].

Развивающее обучение математике – это становление-развитие системы знаний как системы гетерархической, это развитие самого гетерархического ее начала.

Реализация в обучении математике гетерархического принципа требует пересмотра традиционных принципов обучения и преодоления все еще бытующих механистических форм обучения.

Изучение всякой темы школьного или вузовского курса математики, обращение к ней с более широких позиций является эффективным средством более глубокого ее освоения. Оно несет развивающее начало уже тем, что способствует выявлению и более глубокому освоению тех общих приемов и методов, на использовании которых основано изучение этой (и не только этой) темы. Через надпредметный подход оно выводит на метапредметный подход к ее освоению. Этому в немалой степени способствует использование знаковых средств.

Предмет всякой темы школьного курса математики посвящен новым для учащихся орудиям математической деятельности или новым способам использования уже известных им орудий. И потому освоение всякой такой темы становится продуктивным при осуществлении его как освоения и развития соответствующих форм поисково-исследовательской деятельности и отвечающих им форм знаковой деятельности. Это будет проиллюстрировано на примере подхода к теме «Квадратные уравнения». Обращение к этой теме показывает, как осуществление описываемого подхода к обучению преобразует не только ее содержание, но и ее дух. И при всем том, что статья посвящена не только теме «Квадратные уравнения», и не столько ей, сколько общим вопросам обучения математике, особое место этой давно укорененной темы в школьном курсе математики вместе с весьма заземленным подходом к ней служат оправданием названию заметки.

Текст статьи сопровождается диалогами учителя со школьниками и автора с учителями математики. Знаки **У**, **У**$_1$**,** **У**$_2$, … / **Ш, Ш**$_1$, **Ш**$_2$, … являются указаниями на то, что отвечающие им реплики, суждения принадлежат учителям / школьникам, а знак **А** – что отвечающие ему реплики, суждения принадлежат автору.

***

Настоящую часть статьи должно рассматривать не столько как конспективное изложение сценария занятий, посвященных теме «Квадратные уравнения» и осуществляемых в духе описанных установок, сколько как описание логики их развертывания и определяемой ею формы таких занятий.

Изучение этой темы в контексте изучения алгебраических уравнений делает целесообразным введение более строгого понятия, чем понятие равносильности, такого, которое выражает одинаковость не только множества значений корней уравнений, но и их кратностей.

Вопреки укоренившейся традиции, приобщение учащихся к общему способу решения квадратных уравнений посредством выведения формулы для вычисления их корней мы осуществляем не как можно раньше, а, напротив, насколько возможно позднее. Это позволяет сохранить их поисково-исследовательский «тонус» и больше способствует развитию их способностей к поисково-исследовательской деятельности.

Мы не приводим здесь самый начальный этап изучения названной темы, на котором вводятся понятия алгебраического уравнения, приведенного уравнения, корня уравнения, равносильности уравнений.

У: Вот во многих отношениях удобная форма записи квадратного уравнения, у которого два корня – x_1 и x_2, не обязательно разные:

$$(x–x_1)(x–x_2)=0 \qquad (1)$$

А это – приведенное квадратное уравнение, получаемое из него раскрытием скобок и приведением подобных членов:

$$x^2–(x_1+x_2)x+x_1x_2=0, \qquad (2)$$

которое с помощью обратных преобразований преобразуемо в уравнение (1).

Ш$_1$: Разве естественно говорить о двух, а не об одном корне, если $x_2=x_1$?

У: Представим следующую ситуацию. Два мальчика купили по несколько разных книг. Пользуясь подходящими данными, требуется найти, по сколько книг они купили. Допустим, что поиск этих количеств удалось свести к решению квадратного уравнения, корнями которого они являются. Разве не естественно в этой ситуации говорить о двух корнях этого уравнения и в случае их равенства? Дальнейшее изучение алгебраических уравнений принесет существенные оправдания такому пониманию, в соответствии с которым, например, уравнение $(x-a)(x–b)(x–b)(x–b)(x–c)(x–c)=0$ имеет один корень a, три корня b и два корня c, или, как принято говорить, это уравнение имеет корень a кратности 1, или простой корень a, корень b кратности 3 и корень c кратности 2.

Решите следующую задачу: найти приведенное квадратное уравнение, корнями которого являются а) 2 и 3; б) 1 и 1.

Ш$_2$: Это просто: подставляя в случае а) в уравнение (1) $x_1=2$ и $x_2=3$ или $x_1=3$ и $x_2=2$, а в случае б) – $x_1=1$ и $x_2=1$, раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем искомое уравнение.

Ш$_3$: Искомое уравнение можно сразу записать в приведенной форме, воспользовавшись тем, что, как показывает выражение (2), коэффициент при x равен минус сумме корней, а свободный член – их произведению. В случае а) получаем $x^2–(2+3)x+2\cdot3=0$, или $x^2–5x+6=0$, а в случае б) – $x^2–2x+1=0$.

Ш$_4$: В этом решении задачи при отыскании коэффициентов уравнения $x^2+px+q=0$ используются содержащиеся в (2) выражения через корни коэффициентов уравнения, полученного преобразованием уравнения вида (1). А не существует ли другое приведенное квадратное уравнение, не получаемое подобным образом из уравнения $(x–2)(x–3)=0$, уравнение с теми же корнями, но с другими коэффициентами? Существуют ли приведенные квадратные уравнения с одними и теми же корнями, но разными коэффициентами?

У: Пусть уравнение $x^2+px+q=0$ имеет разные корни x_1 и x_2. Тогда $x_1^2+px_1+q=0$ и $x_2^2+px_2+q=0$. Решая эти равенства как систему уравнений с неизвестными p и q, приходим к тому, что $p=-(x_1+x_2)$ и $q=x_1x_2$. И в случае равенства x_1 и x_2 мы придем к тому же результату. (В самом деле, так как $x_1^2+px_1+q=0$, то уравнение $x^2+px+q=0$ равносильно уравнению $x^2+px+q=x_1^2+px_1+q$, а значит, уравнению $x^2+px+q-(x_1^2+px_1+q)=0$, или $(x^2-x_1^2)+(px-px_1)=0$ или $(x-x_1)(x-(-(p+x_1))=0$. Корень $-(p+x_1)$ является корнем уравнения $x^2+px+q=0$. Значит, он равен x_1. Но тогда $p=-(x_1+x_1)$. Из $x_1^2+px_1+q=0$ следует $q=-x_1^2-px_1=x_1x_1$). Таким образом, для всякой пары одинаковых или разных чисел x_1 и x_2 существует единственное приведенное квадратное уравнение, для которого эти числа являются корнями, – это уравнение (2), преобразуемое в уравнение (1). Подобным образом можно убедиться и в том, что для всякой тройки чисел существует единственное приведенное уравнение третьей степени, для которого числа этой тройки являются ее корнями. Аналогичное верно и для уравнений бóльших степеней.

Ш$_5$: А ведь найденные соотношения между корнями и коэффициентами приведенного квадратного уравнения можно использовать для более простого нахождения второго его корня при найденном первом. Например, легко усмотреть, что число 1 является корнем уравнения $x^2+4x-5=0$. А так как произведение его корней равно свободному члену, то второй корень, x_2, находится из соотношения $1 \cdot x_2=-5$. Он равен -5.

Ш$_4$: В действительности тобою доказано всего лишь то, что если существует второй корень, то он равен -5.

Ш$_5$: Проверка показывает, что это число действительно является корнем нашего уравнения.

Ш$_4$: А можно ли было здесь обойтись без проверки? Верно ли то, что если квадратное уравнение (с действительными коэффициентами) имеет хотя бы один (действительный) корень, то оно имеет два (действительных) корня, возможно, равных, а значит, что в этом случае можно использовать формулы, выражающие корни уравнения через его коэффициенты?

У: Это действительно так. Пусть x_1 – (действительный) корень уравнения (с действительными коэффициентами) $x^2+px+q=0$, то есть $x_1^2+px_1+q=0$. Тогда это уравнение можно записать так: $x^2+px+q=x_1^2+px_1+q$. А это уравнение легко преобразуемо в следующее: $(x-x_1)(x+p+x_1)=0$. Отсюда ясно, что оно имеет и второй (действительный) корень, равный $-(p+x_1)$.

Таким образом, если уравнение $x^2+px+q=0$ имеет корень, то у него есть два корня (разных или одинаковых) корня и оно представимо в виде (1). Можно показать, что если уравнение третьей степени имеет два корня, то у него есть три корня. Аналогичное верно и для уравнений более высоких степеней.

Решите следующую задачу: найти приведенное уравнение третьей степени $x^3+px^2+qx+r=0$, корнями которого являются 1, 2 и 3.

Ш$_5$: Эта задача решается аналогично предыдущей: раскрывая скобки и приводя подобные члены в левой части уравнения

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=0, \qquad (3)$$

получаем

$$x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-x_1x_2x_3=0 \quad (4)$$

(Как мы отметили выше, (4) является единственным приведенным уравнением третьей степени, корнями которого являются x_1, x_2, и x_3). А так как $x_1=1$, $x_2=2$ и $x_3=3$, то, согласно (4), $p= -(x_1+x_2+x_3)= -(1+2+3)= -6$, $q=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=11$, $r=-x_1x_2x_3= -6$.

Ш$_4$: А существуют ли квадратные уравнения, не имеющие корней?

У: Ни для какого числа $a>0$ уравнение $x^2+a=0$ не имеет корней. А значит, существуют уравнения как угодно больших четных степеней, не имеющие корней. Таковы, например, уравнения вида $(x^2+1)^n=0$. Надеюсь, что вы легко найдете ответ на следующий вопрос: существует ли такое $n>2$, что всякое уравнение n-ой степени либо не имеет корней либо имеет в точности n корней (с учетом их кратностей)?

А сейчас решите следующую задачу: Числа 2 и 5 являются корнями уравнения с целыми коэффициентами $x^3+px^2+qx+10=0$. Найти третий его корень и коэффициенты p и q.

Ш$_4$: Существует ли алгебраическое уравнение, у которого число корней (с учетом их кратностей) больше его степени?

У: Предлагаю вначале Вам самим подумать над этим значимым вопросом. А позднее мы к нему возвратимся.

Заметим, что разделив почленно обе части неприведенного уравнения на его старший коэффициент, получим равносильное ему приведенное уравнение. Цепочки преобразований уравнения (1) в уравнение (2) и уравнения (3) в уравнение (4) и цепочки обратных им преобразований уравнения (2) в уравнение (1) и уравнения (4) в уравнение (3) –это цепочки таких наиболее часто используемых обратимые преобразований уравнений, как переносы тех или иных членов из одной части уравнения в другую с изменением их знака, как умножение обеих частей уравнения на одно и то же число, отличное от 0, как разложение какой-либо его части на множители, как приведение подобных членов, и т. д. Для всякого алгебраического уравнения α уравнение β, получаемое из него цепочкой таких преобразований, имеет ту же степень и таково, что всякий корень какого-либо из этих уравнений является и корнем другого и имеет ту же кратность. В таком уравнении естественно видеть иную форму записи уравнения α.

> Форма постановки следующих четырех и некоторых последующих задач превращает их из прямых отсылок к известным школьникам знаниям в средство, активизирующее их исследовательское начало.

Задача 1а. Решая неприведенное уравнение с натуральными коэффициентами а) $2ax^2+ax+b=0$; б) $3ax^2+bx-1=0$, школьник установил, что у него два целых корня. Доказать, что он ошибся.

Задача 1б. Решая приведенное квадратное уравнение с целыми коэффициентами, школьник установил, что только один из его корней целый. Доказать, что он ошибся.

Задача 1в. Решая приведенное квадратное уравнение с рациональными коэффициентами, не все из которых целые, школьник установил, что оба его корня целые. Доказать, что он ошибся.

Задача 1г. Решая уравнение $x^3+px^2+qx+r=0$, где p, q и r – попарно различные простые числа, большие 2, школьник установил, что оно имеет а) три целых корня, из которых один четный; б) два целых и один не целый. Доказать, что школьник ошибся.

> Решения следующих задач выразительно демонстрируют, что алгебраические знаковые средства являются далеко не просто (знаковыми) замещениями, что они несут зримые проявления новых связей

и отношений, ведущие к преображению поисково-исследовательской деятельности, что они несут «эврики».

Задача 2. Решить уравнение $x^2–x–1119\cdot1120=0$.

Ш: Эврика! Это уравнение преобразуемо в следующее:

$$x(x–1)=1120\cdot(1120–1).$$

Очевидно, что 1120 – его корень. А так как произведение его корней равно $–1119\cdot1120$, то другим его корнем является $–1119$.

У: То, что ты усмотрел и использовал, можно выразить так: рассмотренное уравнение имеет вид $F(x)–F(x_0)=0$ и потому число x_0 является его корнем. Пусть $F(x)=ax^2+bx+c$. Тогда

$$F(x)–F(x_0)=ax^2+bx+c–(ax_0^2+bx_0+c)=a(x^2–x_0^2)+b(x–x_0).$$

Отсюда ясно, что $F(x)–F(x_0)$ делится на $x–x_0$. А значит, если x_0 – корень $F(x)$, то есть если $ax_0^2+bx_0+c=0$, то $F(x)$ делится на $x–x_0$. Легко видеть, что верно и обратное. Таким образом, квадратный трехчлен делится на двучлен $x–x_0$ тогда и только тогда, когда число x_0 является корнем этого трехчлена. Мы получили новое доказательство уже известного нам факта.

Ш: А не верно ли это и для многочленов более высоких степеней?

Задача 3. Найти приведенное квадратное уравнение $F(x)=0$, равносильное уравнениям $F(x)–F(1)=0$ и $F(x)–F(–1)=0$.

Решение следующей задачи также показывает, что даже такое преобразование уравнения, как перенос какого-нибудь слагаемого из одной части уравнения в другую (с изменением его знака) может существенно изменить «угол зрения», породить новую тактику внимания. Это нередко приводит к усмотрению в уравнении новых значимых связей и отношений.

Задача 4. Доказать, что уравнение $x^2–71x-121=0$ не имеет целых корней.

Ш: Эврика! Это уравнение можно записать так: $71x=x^2–11^2$, а значит, так: $71x=(x-11)(x+11)$. При четных значениях x левая часть уравнения четна, а правая нечетна, а при нечетных – левая часть нечетна, а правая четна. Следовательно, уравнение не имеет целых корней.

У: Преобразование уравнения $ax^n+bx^{n-1}+ …+ ix+j=0$ с целыми коэффициентами в уравнение $ax^n+bx^{n-1}+ …+ix= –j$, а посредством этого в уравнение $x(ax^{n-1}+bx^{n-2}+ … +i)= –j$, позволяет усмотреть следующее:

целыми корнями алгебраического уравнения с целыми коэффициентами могут быть только делители его свободного члена (5)

Не намного сложнее на этом же пути усмотреть более общий факт:

рациональное число только тогда может быть корнем алгебраического уравнения с целыми коэффициентами когда числитель его представления несократимой дробью является делителем свободного члена, а знаменатель – делителем старшего коэффициента (6)

Из (6) непосредственно следует, что

рациональными корнями приведенного уравнения с целыми коэффициентами могут быть только целые числа. (7)

Задача 5. Найти рациональные корни уравнения

а) $x^2–7x+10=0$; б) $6x^3+5x^2–2x–1=0$; в) $x^3–9x^2+24x–16=0$.

Ш$_6$: Рассмотрим уравнение в). Согласно (7) его рациональными корнями могут быть только целые числа. Согласно (5) целыми его корнями могут быть только делители свободного члена, то есть какие-то из чисел ±1, ±2, ±4, ±8, ±16. Проверка показывает, что числа –1, ±2 и –4 корнями не являются, а числа 1 и 4 являются. Так как это уравнение 3-й степени имеет два корня, то оно имеет и третий корень. Остается проверить числа ±6 и ±12.

У: Не только: возможно, третий корень равен 1 или 4.

Ш$_6$: Но как это узнать?

Ш$_5$: Согласно (4) произведение корней нашего уравнения равно –16: $1\cdot 4\cdot x_3=-16$. Отсюда $x_3=-4$.

Задача 6. Доказать, что для всякого $n>1$ число $\sqrt[n]{2}$ иррационально.

Всякое такое число является корнем приведенного уравнения с целыми коэффициентами $x^n-2=0$. Согласно (7) его рациональными корнями могут быть только целые числа. А согласно (5) целыми его корнями могут быть только делители его свободного члена – числа 2. Но ни один из делителей числа 2 не является корнем этого уравнения. Значит, корни этого уравнения иррациональны.

> Сопоставление этого решения с классическим доказательством иррациональности $\sqrt{2}$ при всей непреходящей ценности последнего может служить яркой демонстрацией качественно новых возможностей, несомых знаковыми средствами алгебры. Воплощенная в них возможность подходов к проблемам с общих позиций тривиализирует пифагорейский подход к этому результату, но, конечно, не сам этот выдающийся результат как исторически первый результат доказательства принципиальной ограниченности возможностей определенных математических средств.

Задача 7. Доказать иррациональность чисел $\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

Ш$_1$: $\alpha^2=5+2\sqrt{6}$. Отсюда $(2\sqrt{6})^2=(\alpha^2-5)^2$, а значит, $\alpha^4-10\alpha^2-1=0$. Таким образом, α является корнем уравнения $x^4-10x^2-1=0$. Это уравнение не имеет рациональных корней, а значит, α иррационально.

Ш$_2$: А вот другое доказательство. $\alpha-\sqrt{2}=\sqrt{3}$. Отсюда $(\alpha-\sqrt{2})^2=(\sqrt{3})^2$, или $\alpha^2-2\alpha\sqrt{2}+2=3$, или

$2\alpha\sqrt{2}=\alpha^2-1$, или $\sqrt{2}=(\alpha^2-1)/2\alpha$. Из предположения, что α рационально, следовала бы рациональность правой части последнего равенства, а значит, рациональность $\sqrt{2}$, что неверно.

Задача 8 Доказать иррациональность числа $\beta=\sqrt{2}+\sqrt[3]{5}$.

Задача 9. Не осуществляя вычислений, убедиться в том, что уравнение

а) $3x^2+109x-37=0$; б) $x^6+x^4+x^2-47=0$; в) $x^2-4x-7234=0$; г) $x^3-6x^2-7230=0$

не имеет целых корней.

Ш$_1$: Уравнение а) преобразуемо в $x(3x+109)=37$. Так как ни 1, ни –1 не являются его корнями, то при любых целых значениях x, отличных от 1 и –1, левая часть последнего уравнения будет составным числом, тогда как его правая часть является числом простым. Значит, никакое целое число не является его корнем.

> Это еще один пример, при всей своей тривиальности зримо показывающий, что знаковые средства алгебры рождают принципиально новые приемы и методы

Ш$_2$: А вот еще более простое решение уравнения а). Правая часть последнего уравнения нечетна, но при любых целых значениях x его левая часть принимает четные значения. Так что никакое целое значение x не является его корнем.

Ш$_3$: Рассмотрим уравнение б). Его преобразование к виду $x^6+x^4+x^2=47$ делает очевидным, что его корнями могут быть только такие числа, модули которых больше 1, а преобразование к виду $x(x^5+x^3+x)=47$ – что при любом целом значении x, модуль которого больше 1, левая часть последнего уравнения является составным числом, тогда как правая часть есть число простое. Значит, оно не имеет целых корней.

Ш$_4$: А вот другое доказательство: левая часть уравнения $x^6+x^4+x^2=47$: при любых целых значениях x делится на 3, а правая не делится. Значит, уравнение не имеет целых корней.

Ш$_5$: Не сложнее доказательство, использующее утверждение (5). Целыми корнями этого уравнения могут быть разве лишь ±1 и ±47. Очевидно, что ни 1 ни -1 корнями не являются. А при подстановке в уравнение ±47 получаем зримо ложное равенство $47^6+47^4+47^2=47$.

> Использование разных способов решения одной и той же задачи и их сопоставления – это эффективное средство обучения и самообучения. Это и средство осознания учащимися того, что нередко вопрос о том, какой из найденных способов решения задачи является наилучшим, неуместен так же, как и вопрос о том, какое упражнение из комплекса физических упражнений наиболее полезно. Это и эффективное средство формирования настроя учащихся на творческое отношение к задачам, на поиск такого нередко возможного решения, которое несет прямое усмотрение и самого ответа и его обоснования.

Ш$_6$: Рассмотрим уравнение в). Его можно записать в виде $x^2=4x+7234$. Отсюда ясно, что целыми его корнями могут быть только четные числа. Запишем уравнение в виде $x(x-4)=7234$. При любом четном значении x левая часть делится на 4, а правая не делится. Значит, никакое четное число не является корнем.

Ш$_7$: То, что уравнение г) не имеет целых корней, доказывается совершенно так же, как и то, что уравнение в) не имеет целых корней.

У: Это усматривается из условий, выражаемых подходящей общностью уравнений в) и г). Как же выразить в знаковой форме эту общность? Иначе говоря, как выразить общий вид таких уравнений?

Ш$_7$: $x^n+ax^{n-1}+c=0$, где a и c– четные числа и c не делится на 4.

Ш$_8$: Вот более общий вид таких уравнений: $x^n+ax^{n-k}+c=0$, где $k<n$, a и c– четные числа и c не делится на 4.

Ш$_9$: А вот еще более общий вид таких уравнений:

$$x^n+ax^{n-k}+b_1x^{n-k-1}+b_2x^{n-k-2}+\ldots+b_{n-k-1}x+c=0,$$

где $k<n$, a и c– четные числа и c не делится на 4, а числа $b_1, \ldots, b_{n-k-1}$ делятся на 4.

Задача 10. Решая уравнение с натуральными коэффициентами $ax^3+bx^2+cx+d=0$, школьник установил, что числа а) 1, 2 и 3; б) -1, -2 и 3 являются его корнями. Доказать, что он ошибся.

Задача 11. Решая уравнение с целыми коэффициентами $ax^2+bx+c=0$, где a – простое число, школьник установил, что его корнями являются 2/17 и 3/23. Доказать, что он ошибся.

Задача 12. Найти приведенные квадратные уравнения с целыми коэффициентами, для которых число $3-2\sqrt{5}$ является корнем. Как много таких уравнений?

Задача 13. Доказать (усмотреть), что у всякого квадратного уравнения, корнями которого являются $1+\sqrt{5}$ и $2+\sqrt{7}$, имеются иррациональные коэффициенты.

Задача 14. Решая приведенное уравнение третьей степени с натуральными коэффициентами, школьник установил, что его корнями являются а) 2, –4 и 1/3. Доказать, что он ошибся.

Задача 15. Доказать, что уравнение $x^2–2x–7236=0$ не имеет целых корней.

Запись уравнения в виде $x^2=2x+7236$ позволяет увидеть, что целыми его корнями могут быть только четные числа. А запись его в виде $x(x–2)=7236$ позволяет усмотреть, что при любом четном значении x его левая часть делится на 8, а правая не делится. Значит, и никакое четное число не является корнем.

Задача 16. Доказать, всякое уравнение $x^2+px+q=0$ с помощью подходящей подстановки $x=t+a$ преобразуемо в уравнение вида $t^2+b=0$.

Задача 17. Найти наименьшее значение функции $y=x^2+px+q$.

Задача 18. Решить уравнение а) $(x+a)^2–b^2=0$; б) $x^2–2x–2=0$.

Решение трех последних задач подготавливает к самостоятельному отысканию учащимися формулы для отыскания корней квадратного уравнения. Здесь предполагается подчеркнуть особенности квадратных уравнений как уравнений алгебраических. Не в последнюю очередь предполагается отметить что, помимо уравнений первой степени, только для квадратных уравнений существует формула для нахождения корней.

Задача 19. Найти множество всех корней уравнения а) $x^2+4x+2=0$; б) $x^2+4x+5=0$.

Задача 20. Решить уравнение $x^3–x^2–1119\cdot1120^2=0$.

Ш$_1$: Решение задачи 2 подсказывает, как найти один из корней этого уравнения. Преобразуем уравнение в уравнение $x^2(x-1)=1120^2\cdot(1120-1)$, имеющее вид F(x)=F(1120). Отсюда ясно, что 1120 – его корень. Но как найти другие его корни (если они имеются)? Можно ли, а если да, то как воспользоваться найденным корнем для упрощения решения задачи?

Ш$_2$: При обсуждении способа решения задачи 2 было показано, что если F(x) – многочлен второй степени, корнем которого является число x_0, то F(x) делится на $x–x_0$. Вероятно, это верно и для многочленов третьей степени. Если это так, то левая часть уравнения $x^3–x^2–1119\cdot1120^2=0$ делится на x–1120, то есть представима как (x–1120) G(x), где G(x) – многочлен второй степени. Его корни (если они имеются) являются остальными корнями нашего уравнения.

Пусть, например, $F(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Тогда

$$F(x)–F(x_0)=ax^3+bx^2+cx+d–(ax_0^3+bx_0^2+cx_0+d)=a(x^3–x_0^3)+b(x^2–x_0^2)+c(x–x_0).$$

А так как двучлены $x^2–x_0^2$ и $x^3–x_0^3$ делятся на $x–x_0$, то правая часть этого равенства делится на $x–x_0$, то есть представима как $(x–x_0)G(x)$, где G(x) квадратный трехчлен. Таким образом, $F(x)–F(x_0)=(x–x_0)G(x)$. Тем самым истинность нашего предположения для многочленов 3-й степени доказана. Совершенно так же аналогичное доказывается для многочленов бóльших степеней. Однако такое доказательство потребует решения следующей задачи:

Задача 21. Доказать, что для всякого m двучлен $x^m–x_0^m$ делится на $x–x_0$.

Вот более более «прямое» доказательство истинности нашего предположения, то есть доказательство следующей теоремы:

Если x_0 *– корень многочлена* F(x), то F(x) *делится на* $x–x_0$. (8)

При делении какого-либо многочлена на многочлен n-ой степени остатком будет многочлен меньшей степени (могущий быть и тождественно равным 0).

В частности, при делении многочлена на многочлен первой степени остатком будет многочлен нулевой степени, представимый некоторым числом.

Пусть частным при делении многочлена F(x) на $x-x_0$ является многочлен G(x), а остатком –r, то есть $F(x)=G(x)(x-x_0)+r$. Для любого числа x_0 $F(x_0)=G(x_0)(x_0-x_0)+r$, то есть $F(x_0)=r$. Иначе говоря, для любого числа x_0 остаток при делении F(x) на $x-x_0$ равен $F(x_0)$, или $F(x)=G(x)(x-x_0)+F(x_0)$. Если x_0 – корень F(x), то есть если $F(x_0)=0$, то F(x) делится на $x-x_0$. (Очевидно и то, что если многочлен делится на $x-x_0$, то x_0 является его корнем).

Заметим, что при делении многочлена с целыми коэффициентами на двучлен $x-x_0$, где x_0 – целое число, частное и остаток являются многочленами с целыми коэффициентами. Более того, при делении многочлена с целыми коэффициентами на приведенный многочлен с целыми коэффициентами частное и остаток являются многочленами с целыми коэффициентами.

> **У**: Теорема (8) несет ответы на многие из рассмотренных выше вопросов, относящихся к квадратным уравнениям. Более того, оно несет ответы на аналогичные вопросы, относящиеся и к уравнениям более высоких степеней. Не говорит ли это о целесообразности более раннего приобщения учащихся к этой теореме?
>
> **А**: Учебную задачу следует рассматривать под углом зрения ставящихся учебных целей и средств их достижения. Следование в обучении логике наилучшей, идеальной, организации теории является, как правило, наихудшим средством ее освоения, а тем более развивающего освоения. Разве обращения к упомянутым вопросам, которые были бы сняты предлагаемым Вами «целесообразным» подходом, не являются эффективными средствами развития и логической проницательности учащихся, и освоения ими предметного плана, относящегося к квадратным уравнениям, и обретения опыта, несущего осознание места и роли теоремы (8)? Восходить к значимому, а не исходить из него, не приобщать к нему лобовым образом, тем самым омертвляя его, – этому не может не следовать обучение, направленное на обретение живого знания.

У: Возвратимся к задаче 20. Так как число 1120 является корнем заданного уравнения, то, согласно (8), его левая часть делится на x–1120. Осуществляя деление, получаем

$$x^3-x^2-1119\cdot1120^2=(x-1120)(x^2+1119x+1119\cdot1120).$$

Если заданное уравнение имеет, помимо 1120, еще какие-то корни, то они должны быть корнями квадратного трехчлена $x^2+1119x+1119\cdot1120$. Но этот трехчлен не имеет (действительных) корней.

Задача 22. Решая уравнение третьей степени, школьник установил, что помимо других его корней числа 1, 2, 3 и 4 также являются его корнями. Доказать, что он ошибся.

Задача 23. Доказать, что всякое уравнение степени n имеет не более n корней (с учетом их кратностей).

Задача 24. Доказать, что всякое алгебраическое уравнение (имеющее корни) преобразуемо в уравнение вида

$$(x-a)\cdots(x-c)R(x)=0, \qquad (9)$$

где R(x) – многочлен (возможно, нулевой степени), не имеющий корней.

У: Решая разнообразные алгебраические уравнения, мы использовали те или иные их преобразования, приводящие к равносильным им уравнениям. Равносильные уравнения могут быть очень мало похожими. Так, общая форма уравнений вида (9), равносильных уравнению $(x–a)(x–b)^3(x–c)^2P(x)=0$, где $P(x)$ – многочлен, не имеющий корней, такова: $(x–a)^m(x–b)^n(x–c)^pR(x)=0$, где m, n и p – какие-нибудь натуральные числа, а $R(x)$ – многочлен, не имеющий корней. Естественно ввести в рассмотрение такое отношение между алгебраическими уравнениями, которое характеризовало бы большую их близость, чем равносильность.

Будем говорить что два алгебраических уравнения *строго равносильны*, если всякий корень одного из них является корнем другого и имеет ту же кратность.

Общая форма уравнений вида (9), строго равносильных, например, приведенному выше уравнению $(x–a)(x–b)^3(x–c)^2P(x)=0$, такова: $(x–a)(x–b)^3(x–c)^2R(x)=0$, где $R(x)$ – многочлен, не имеющий корней.

Задача 25. Найти приведенное уравнение $F(x)=0$ пятой степени, строго равносильное уравнению $(x–1)^2(x–2)=0$ и такое, что $F(0)= –2$ и $F(–1)= –24$.

Задача 26. Доказать, что для всякого n уравнение $F^n(x)=G^n(x)$ является следствием уравнения $F(x)=G(x)$.

Задача 27. Доказать, что алгебраическое уравнение $F(x)=G(x)$, такое, что $F(x)$ и $G(x)$ не имеют общих корней, строго равносильно уравнению $F^3(x)=G^3(x)$.

Задача 28. Решая уравнение $3x^4+px^3+qx^2+rx+18=0$, где p, q и r– целые числа, школьник установил, что числа 3 и 9 являются его корнями. Доказать, что он ошибся.

Задача 29. Доказать, что если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – какие-нибудь из целых корней уравнения с целыми коэффициентами, то его свободный член делится на их произведение.

Задача 30. Найти все рациональные корни уравнения $x^3–3x^2–x–12=0$.

Ш$_1$: Так как это уравнение приведенное и его коэффициенты целые, то его рациональными корнями могут быть только целые числа, являющиеся делителями свободного члена, то есть числа $\pm 1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12$. Остается испытать эти числа.

Ш$_2$: Уравнение можно записать так: $x^3–3x^2–x=12$. При любых нечетных значениях x левая часть уравнения принимает нечетные значения, тогда как правая его часть четная. Значит, целыми его корнями могут быть только четные числа. Поэтому достаточно испытать числа $\pm2, \pm4, \pm6, \pm12$.

Ш$_3$: Подставляя в уравнение неизвестную t, такую, что $x=2t$, получаем $8t^3–12t^2-2t=12$, или $4t^3–6t^2-t=6$, или $t=4t^3–6t^2–6$. Отсюда ясно, что целыми корнями заданного уравнения могут быть только числа, делящиеся на 4. Поэтому достаточно испытать числа $\pm4, \pm12$.

Ш$_4$: Проверка показывает, что число 4 является корнем заданного уравнения. Остается проверить, какие из чисел –4, 12 и –12 являются его корнями.

Ш$_2$: Но еще надо проверить, не является ли 4 корнем кратности 2 или 3.

Ш$_4$: Такие проверки не нужны. Ведь если бы корнем нашего уравнения было, например, число –4, то его свободный член –12 делился бы на произведение 4 (–4), что невозможно. Отсюда же следует, что число 4 является единственным рациональным корнем этого уравнения.

Задача 31. Найти рациональные корни уравнения $x^3+3x^2+3x+9=0$.

Ш$_1$: Согласно (7) рациональными корнями этого уравнения могут быть только целые числа. Согласно (5) его целыми решениями могут быть только делители числа 9. Заметим также, что при положительных значениях x левая его часть принимает положительные значения. А значит, решениями этого уравнения могут быть только отрицательные делители числа 9, то есть числа –1, –3 и –9. Число –1 корнем не является, а –3 является. Если имеется еще какой-нибудь корень, то имеются три корня, произведение которых равно 9. Если бы какой-нибудь был равен –9, то модуль произведения корней был бы больше 9. А значит, уравнение имеет корень – 3 кратности 1 или 3. Если бы –3 было корнем кратности 3, то уравнение делилось бы на $(x-(-3))^3=0$, или, что то же, совпадало бы с ним. Но это не так.

Ш$_2$: То, что число –3 не является корнем кратности 3, усматривается из более простых соображений: если бы оно было корнем кратности 3, то произведение корней нашего уравнения было бы равно не 9, а –27.

Ш$_3$: А вот более простое решение этого уравнения. Запись его в виде $x^3= -3x^2-3x-9$ помогает усмотреть, что его целыми корнями могут быть только числа, кратные 3. Это делает естественным использование подстановки $x=3t$. Ее результатом является уравнение $27t^3+27t^2+9t+9=0$. Разделив обе его части на 9, получаем уравнение $3t^3+3t^2+t+1=0$, или $(3t^2+1)(t+1)=0$. Единственным его корнем является число $t_0= -1$. Следовательно, единственным корнем заданного уравнения является число $x_0=3t_0= -3$.

Задача 32. Решая уравнение $x^2+37811x+7101.=0$, школьник установил, что его корнями являются 211 и –37. Доказать, что он ошибся.

Ш$_1$: Доказать это можно прямой проверкой.

У: Это так. Но проверка потребует осуществления громоздких вычислений. Нельзя ли ошибочность решения *усмотреть*?

Ш$_2$: Это просто: произведение корней этого уравнения, если они имеются, положительно. Значит, корни должны иметь один знак. Значения найденных корней этому не отвечают. Вот и доказательство наличия ошибки.

У: А имеются ли корни у этого уравнения?

Ш$_1$: Его дискриминант положителен. А значит, корни имеются.

У: Но, может быть, найденная ошибка результат описки, связанной со знаком какого-то из корней? Какими же являются знаки корней этого уравнения?

Ш$_2$: Коэффициент при x положителен. Значит, сумма корней отрицательна. А так как корни имеют один и тот же знак, оба они отрицательны.

У: Возможно, школьник записал «211» вместо «–211»?

Ш$_2$: Какое-то из чисел –211 и –37 не является корнем. Ведь их сумма четная, а должна быть нечетной.

Ш$_1$: А подставляя в уравнение число –211, получаем очевидно ложное равенство. Ведь модуль второго слагаемого намного больше суммы первого и третьего. Аналогично дело обстоит и при подстановке в уравнение числа –37.

Ш$_3$: Это можно усмотреть гораздо проще: очевидно, что последней цифрой в записи числа, являющегося произведением –211 и –37, является цифра 7, тогда как последняя цифра в записи свободного члена – это 1.

У: Похоже, мы близки к завершению изучения темы. А материал, напрямую относящийся к квадратным уравнениям, составляет лишь небольшую часть рассмотренного. Не естественней ли для этой темы название «Алгебраические уравнения»?

А: При всем том есть оправдание и названию «Квадратные уравнения». В частности, оно в консерватизме огромной массы учителей, в их привязанности к этой теме, в укорененности в их практике многопоколенного опыта обучения квадратным уравнениям, в видении ими того, как усвоение темы «Квадратные уравнения» (при традиционном к ней подходе) влияет на математическое развитие учащихся. И сохранение такого названия выражало бы установку на то, что «ядерный» план изложенного относится именно к квадратным уравнениям, и на способствование осознанию учащимися того, что изучение всякой темы, каким бы ни было ее «собственное» содержание, выход за ее пределы, обращение к ней с более широких позиций несет средства более глубокого ее освоения. Важно и то, что эти средства и сами предстают здесь как значимый предмет изучения.

У: Но естественно ли то, что при таком названии темы собственно квадратные уравнения представляют лишь малую часть этого предмета?

А: Следование названной выше установке позволяет относиться к рассмотрению этого намного более широкого предмета, прежде всего, как к средствам продуктивного обучения квадратным уравнениям и, сообразуясь с временн**ы**ми возможностями и с характером аудитории, использовать в обучении лишь ту или иную часть этих средств.

Задача 33. Существуют ли многочлены f(x) второй степени с рациональными коэффициентами, принимающие рациональные значения только при рациональных значениях x?

Ш$_1$: Если многочлен второй степени f(x) с рациональными коэффициентами принимает рациональное значение при каком-нибудь иррациональном значении x, то при этом значении x рациональное значение принимает всякий многочлен kf(x), где k – рациональное число. Отсюда ясно, что задача равносильна поиску ответа на следующий вопрос: существуют ли многочлены f(x) второй степени с целыми коэффициентами, принимающие рациональные значения только при рациональных значениях x?

У: Пусть ax^2+bx+c – многочлен с целыми коэффициентами. Тогда многочлен $a^2x^2+bax+ac$, или $(ax)^2+b(ax)+ac$ представим как приведенный многочлен с целыми коэффициентами относительно неизвестной t=ax. Отсюда ясно, что задача равносильна следующей: существуют ли приведенные многочлены второй степени с целыми коэффициентами, принимающие рациональные значения только при рациональных значениях x?

Заметим и то, что если многочлен с целыми коэффициентами $f(x)=x^2+px+q$ таков, что $f(x_0)$ рационально для какого-то иррационального числа x_0, то для всякого многочлена $g(x)=x^2+px+r$, где r – целое число, $g(x_0)$ рационально. Отсюда ясно, что задача равносильна следующей: для всякого ли целого числа p существует такое целое число r, что уравнение $x^2+px–r=0$, или $x(x+p)=r$, имеет иррациональный корень?

Двучлен x^2+px принимает все положительные значения. Пусть r – простое число, большее $1+|p|$. Уравнение $x(x+p)=r$ имеет (действительные) корни. Пусть x_0 – его корень. Он не является рациональным. Ведь если бы он был рациональным, то был бы целым согласно (7). Но если бы он был целым, то выполнялось бы равенство $x_0(x_0+p)=r$, левая часть которого была бы составным числом (так как в силу $r>1+|p|$ ни $|x_0|$ ни $|x_0+p|$ не равно1), а правая часть – простым. Таким образом, ответ на вопрос, поставленный в задаче, отрицателен.

Ш$_2$: Вот совсем простое и потому намного лучшее решение этой задачи. Очевидно, что многочлены вида ax^2+c принимают рациональные значения, например, при $x=\sqrt{2}$. Многочлены, приводимые к виду $a(x+b)^2+c$: при значении x, равном, например, $\sqrt{2}–b$, также принимают рациональные значения. Но всякий многочлен второй степени приводим к такому виду.

Следовательно, многочлены второй степени, принимающие рациональные значения только при рациональных значениях аргумента, не существуют.

У: Да, второе решение задачи 33 совсем простое. Но логика якобы худшего первого решения – это логика решения следующей ниже задачи намного более общего характера.

> **У**: Не слишком ли много нестандартных задач? И не предпочтительней ли такой подход к этой, да и ко всякой другой теме, который состоял бы в обращенности к общей постановке вопроса, в ее исследовании, ведущем к открытию общего метода, и в решении задач, направленных на освоении этого метода?
>
> **А**: А не продуктивней ли (по крайней мере, во многих случаях) подход, состоящий в обращенности к такому разнообразию задач «предметного» уровня, которая несет обращение к задачам надпредметного уровня, представляющим предмет изучаемой темы, и в их решении, несущем и выходы за пределы этой темы? Разве не повышает такой подход энергетику работы живого знания учащихся, направленной на освоение этой темы как живого знания и тем на развитие их поисково-исследовательской деятельности? Разве не способствует такой подход освоению этой темы не как изолированного комплекса знаний, а как части, как аспекта развивающейся целостности математических знаний? И разве он не несет нарастание потенции дальнейших продвижений учащихся в этом направлении?

Задача 34. Доказать, что всякий многочлен f(x) степени n>1 с рациональными коэффициентами при некоторых иррациональных значениях x принимает рациональные значения.

Эта задача может быть переформулирована так: доказать, что всякий многочлен f(x) первой степени с рациональными коэффициентами и только такой многочлен принимает рациональные значения при рациональных значениях x и иррациональные значения при иррациональных значениях x.

> **У**: Второй вариант решения задачи 33 основывается на использовании выделения полного квадрата из квадратного трехчлена. На использовании этого приема основывается отыскание и формулы для корней квадратного уравнения, и критерия существования (действительных) корней таких уравнений, и способа решений квадратных неравенств. Поэтому представляется естественным и эффективным с самого начала изучения названной темы сосредоточиться на усвоении этого приема как базисного, сделать его пронизывающим изучение этой темы.
>
> **А**: Все это было бы оправданным и несло бóльшую эффективность, если изучение этой темы было бы направлено главным образом на названные Вами цели. Но изучение этой темы должно осуществляться как изучение компонента курса математики как целого, а значит, в контексте этого целого как целого развивающегося и нарастающего, в контексте рассмотрения более общих понятий, идей, методов, приемов, как изучение развивающегося общего и особенного в рамках развивающегося общего. И потому преимущественно автономное изучение этой, да и всякой темы не продуктивно, тогда как предлагаемая Вами расстановка акцентов ведет к сосредоточению на автономном изучении рассматриваемой темы.

Важной целью обучения школьников математике является развитие их способностей к поисково-исследовательской деятельности. А это еще больше требует отказа от преимущественно автономного изучения ее частей. И такой подход к обучению не может не быть многомерным и многоуровневым.

У: Правильно ли я понимаю сказанное Вами как утверждение о нежелательности формирования системной организации знаний учащихся?

А: Нет, неправильно. Поясню. При этом я буду говорить о круге вопросов, относящемся к теме «Квадратные уравнения». Но все, что я буду говорить об этом круге вопросов, будет относиться ко всякому кругу вопросов, ко всякой изучаемой в школе теме. Квадратные уравнения выступают в школьном курсе математики в разных планах: и как специальный предмет изучения, и как значимое особенное в рамках рассмотрения алгебраических уравнений, и как компонент содержательной базы при изучении последних, становящийся в этом качестве источником значимых постановок вопросов и полезных «технических» идей, и как орудие познавательной деятельности при изучении других вопросов, и как компонент изучаемой математики как целого, и как средства развивающего обучения. И в разных планах (реализуемых и в отдельности и совместно) квадратные уравнения выступают в разных ролях. Каждый из этих планов требует своей, отвечающей ему, тактики внимания, и своей ценностной позиции, и своей стратегии, и своих тактических средств, и, конечно, своих форм использования знаковых средств, своих форм их прочтения. Каждый их них предполагает свою системность организации знаний, свой ее характер.

Существо наших с Вами расхождений не в том, что Вы требуете системности подхода к обучению, а я ее отторгаю, а в существенном различии форм предполагаемых нами системностей и отвечающих им форм организации знаний. Вы предполагаете формирование устойчивой моно-системности, основываясь единственно на одном из названных планов. Такой системности отвечает традиционная, иерархическая организация знаний. Я же говорю о необходимости полисистемности, или гетерархии, системы, образованной пересекающимися, разнообразными и одновременно сосуществующими структурами управления, и об отвечающей такой системе гетерархической организации знаний. Иерархические отношения присущи моментам или стадиям процесса освоения знаний как процесса гетерархического. Намертво иерархизированные знания – это знания догматические, омертвевшие. Живые, развивающиеся знания не могут не быть гетерархически организуемыми. Системы обучения, несущие развивающее начало, не могут не быть гетерархически организуемыми. И потому задача формирования гетерархически организуемой системы обучения должна рассматриваться как одна из ведущих задач педагогики математики.

Вхождение в новую тему, в новый круг вопросов с позиций обращенности к более широкому кругу вопросов (например, вхождение в тему «Квадратные уравнения» с позиций обращенности к теме «Алгебраические уравнения») является и естественным и продуктивным средством настройки самих учащихся на гетерархический подход к обучению.

Система развивающего обучения должна быть направлена на развитие системы знаний учащихся. Как же должна формироваться система их знаний в процессе изучения темы «Квадратные уравнения», чтобы отвечать целям дальнейшего их развивающего обучения? Должно ли ее освоение быть направленным на ее укоренение или она должна осваиваться как подвижное образование, наращивающее потенцию дальнейшего развития, венчающегося ее преображениями?

Задача 35. Найти множество всех решений уравнения

а) $\sqrt{x}+\sqrt{(1-x)}=1$; б) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{(1-x)}=1$.

Далее предполагается решение квадратных неравенств и неравенств, подобных следующим: а) $x^3-6x^2+11x-6>0$; б) $(x-1)(x-2)^2(x-3)(x-4)^2(x-5)<0$. Обращение к задачам таких видов предполагает приобщение учащихся к методу интервалов как основывающемуся на интуитивных представлениях о непрерывных функциях и их графиках.

***

У$_1$: Мне больше нравится то, как рассматриваемая тема, и не только она, представлена в давних учебниках и задачниках. Все в них предельно отработано. И школьники хорошо усваивали этот материал.

А: Эти учебники и задачники способствовали хорошей выучке. Но в какой мере они несли развивающее начало? А вот не менее значимый вопрос: *мимо* каких значимых планов, относящихся к развивающему началу, проходит большинство учителей математики (также как и авторы ряда современных учебников)?

У$_2$: В первую очередь этот вопрос связан с вопросом о средствах логического развития учащихся. Ведь математика – это логика!

А: Большинство учителей понимает под логикой классическую формальную логику или классическую логику предикатов, являющуюся продуктом ее развития. Оспаривать ее значимость, особенно в математике и в обучении математике – это ломиться в открытую дверь. И, конечно, весьма важными являются вопросы о средствах логического развития школьников в рамках обучения математике, о взаимо*со*действии средств их математического и логического развития. Даже в достаточно элементарной математической деятельности участвуют разные логики[6]. А если это так, то как понимать тезис «Математика – это логика»? Во всяком случае, за этим тезисом стоит убеждение, что в обучении математике должно быть задействовано единственно рациональное мышление учащихся, что и поисковая деятельность, являющаяся необходимым ее компонентом, активизирующим глубинные механизмы мышления и тем несущим формирование и развитие необходимых механизмов математической деятельности, должна быть «сплошь» рациональной, что логика в ней должна играть не только стратегическую и не только «экспертную» роль, но что и сам поиск логического обоснования находимых решений должен быть «сплошь» логизированным. Такое убеждение является проявлением крайне редукционистского представления о «темной материи» глубинных механизмов мышления. Следование ему в организации поисковой деятельности учащихся, втискивание этой деятельности в примитивное прокрустово ложе предписываемого, «правильного» действования приводит лишь к ее подавлению или даже разрушению. Следование этому убеждению в организации

[6] См.: [7, с. 231–247; 8 и 9].

учебной деятельности отнюдь не способствует и их логическому развитию. Отсюда чрезвычайная важность вопроса о том, каким *не должно быть* влияние учителя на деятельность учащихся, какой не должна быть форма его влияния для того чтобы быть способствующей обретению учащимися продуктивных средств этой деятельности.

У$_3$: Предлагаемый Вами подход к теме «Квадратные уравнения» мне интересен и в этом плане. Он мне интересен и логикой построения материала, и задачами, и характером обсуждений. Но вызывает сомнения возможность освоения школьниками такого подхода во всей его многомерности и многоуровневости, во всей его сложной системности.

А: А разве строительные леса должны быть хоть в малой степени подобными самому строящемуся дому? Разве система процесса обучения является той системой, которая подлежит освоению? Да и системную ли форму обретает в голове учащегося хорошо освоенный им материал? А если системную, то та ли эта системность, которая выстраивается в учебном процессе как *средство* освоения? Если обратиться к хорошо успевающему школьнику с вопросом, что он освоил, изучая такую-то тему, то его ответ наверняка не удовлетворит нас недостаточной полнотой и отсутствием в нем хотя бы начальных проявлений системности. И это притом, что он разумно ответит на конкретные вопросы теоретического характера и продемонстрирует умение решать нетривиальные задачи, связанные с этой темой, высокую культуру такого умения, высокий уровень ориентировки.

У$_3$: Но не говорит ли это о целесообразности и даже о необходимости изложения учителем еще и резюмирующего заключения по изученной теме, краткого, несущего возможность схватывания в целом системного изложения того существенного, что несет в себе изученный материал?

А: Математические знания не отделимы от умений и навыков. Их предмет – это метод, а значит, *сама математическая деятельность*. Продукты их освоения – это не новые понятия «сами по себе», не новые теоремы «сами по себе», не какие-либо творческие продукты математической деятельности «сами по себе», а обретаемые способности к новым уровням, формам и направлениям математической деятельности. Это развитие метакогнитивных способностей, несущее не только общематематическое, но и общее интеллектуальное развитие. Изучение математики, направленное на освоение самой математической деятельности, несет освоение отвечающих ей форм и уровней мышления, их взаимодействий, их взаимных превращений. Оно несет освоение и развитие мета-навыков и мета-смыслов. И поэтому процесс обучения должен быть процессом активизации живого знания, направленной на его развитие и обретение нового живого знания. Но в какой мере предлагаемое резюмирующее средство может выразить все это? В какой мере оно сможет передать это как живое знание, стоящее за деятельностным началом, представляющим диалог-взаимодействие множества планов с изменяющимися их ролями? И не стоит ли за предлагаемым Вами способом, направленным на помощь обретению учащимися системных знаний, недооценка опасности того, что настойчивое «системное» «достраивание», достраивание извне, сформировавшихся у школьников знаний, скажем, о квадратных уравнениях, знаний, формировавшихся как многомерные и многоуровневые, как живые знания, не согласуется с их глубинными познавательными механизмами, с их индивидуальными особенностями и может привести к превращению их живых знаний в устойчивые мертвые стереотипы? Не стоят ли за высказанными Вами опасениями переоценка возможностей и роли рационального начала и недооценка или даже игнорирование роли внерациональных (и не в последнюю очередь над-рациональных) начал в деятельности учащихся? Освоенность учащимся новых знаний как живых знаний – это продукт его энергии, рождаемой интересом, а с ним активной деятельностью, активными поисками, пробами, игрой фантазии и воображения, возгорающим творческим началом, а не продукт подменяющего их унылого прилежания. Формируемые учебной деятельностью живые знания учащегося, возникающие в форме смысловых скачков, – это творческие продукты в смысле А. Ф. Лосева [11] или их подобия, также характеризуемые «самодовлеющей значимостью» (для учащегося) и «агенетичностью» и формируемые внутренними механизмами учащегося, представляющими не сознаваемые им активные взаимодействия рациональных и внерациональных механизмов мышления, рождающими его преображение. Функционируя как орудия математической деятельности, они проявляют свою «агенетичность», то есть иную логику функционирования, иные возможности, иную свою природу, чем та, которая закладывалась логикой процесса их формирования. Несомое таким продуктом метапредметное начало становится освобожденным от привязанности к тем ситуациям, к тем контекстам, в рамках которых оно формировалось, и проявляет себя более свободно и более широко, не как связанное именно с этими ситуациями, не как присущее самим этим ситуациям, не как относящееся именно к этим контекстам. Многомерность и многоуровневость процесса освоения, например, рассмотренной темы переплавлены в таких продуктах в обретаемую возможность многомерности и многоуровневости использования их как орудий математической деятельности. Как системные образования они функционируют как гетерархические системы. Вне математической деятельности они пребывают в свернутом состоянии. Описываемое Выготским мышление синкретами и комплексами присуще не только ребенку. «Впадение» в такую форму мышления естественно и для человека с развитым интеллектом при столкновении с необычными для него ситуациями. В мышлении синкретами и комплексами усматриваются начальные проявления следования гетерархическому принципу. Материальными носителями таких форм мышления у ребенка являются «*сверхгибкие, сверхподвижные психические процессы и структуры… Важнейшей формой таких структур являются диффузные глобальные психические образования. Это типично поисково-пробующие структуры, несущие функцию широкого универсального поиска. Они играют «доминантную роль в непрерывном обновлении любых психических образований дошкольника, которое обусловлено чрезвычайно мощным творческим потенциалом развития, который представлен в этих структурах. Будучи чрезвычайно подвижными и изменчивыми, данные структуры легко входят во взаимодействие друг с другом, образуя в процессе такой иерархизации еще более глобальные, подвижные структуры, лежащие в основе детского воображения и фантазии. Они способствуют познанию детьми очень сложных связей и зависимостей внешнего и внутреннего мира ребенка. Следует отметить особое значение этих структур как основы развития всех видов детского творчества. Важнейшее условие поддержания высокого уровня активности дошкольника заключается в том, чтобы рост и развитие глобальных, поисковых структур обгонял рост и развитие диффе-*

ренцированных устойчивых структур. Противоречие между устойчивостью психических образований и их изменчивостью – это центральное противоречие развивающейся детской психики. Оно выступает как источник психического развития ребенка. Благодаря такой противоречивости и динамичной структуре внутреннего мира детей обеспечивается огромная «работоспособность» и стремительность развития психики, создается основа для освоения детьми колоссального все усложняющегося содержания» [16]. Возможно ли не задаваться вопросом о том, какой должна быть система обучения и в школе и в вузе для полнокровного развития «детских» познавательных качеств учащихся и полнокровного их использования, для достижения органики сочетания этих качеств с такими, как критичность, прагматичность, целеполагание, рефлексия? Какие природосообразные средства обучения отвечали бы этому? Важнейшим средством такого рода является снятие в обучении математике гипертрофии рационального начала. Всякая продуктивная деятельность сопровождается активными взаимодействиями рационального и внерационального начал. Здесь невозможно не обратиться к замечательной формуле: «*Благодаря единству или синтезу меона и эйдетики только и возможен акт творения*» [17, с. 84]. Гипертрофия рационального начала несет «*умертвление жизнепорождающей стихии иррационального, этой «природной» почвы, из «сорного» богатства которой ... растут не только стихи, но и культура*» [там же, с. 56]. В *продуктах* математической деятельности зримо предстают предельные формы рационального начала, кричащие проявления формально-логического плана, и в этом источник мифа, что «математика – это логика». Но сама математическая деятельность, как научная, так и учебная, есть процесс напряженного взаимо***со***действия предельных форм рационального и внерациональных начал (сопровождающийся формированием и развитием новых функциональных органов), процесс активного взаимодействия меонального и эйдетического начал, процесс их развивающегося единства. (Формальная логика как одна из многих логик, участвующих в математической деятельности, как обретающая в такой деятельности свои истинные место и роли, начинает в ней играть не только «экспертную», но и креативную роль). Прежде всего, в следовании этому путь к полноценному решению поставленного выше вопроса. А значит, он и в обретении учащимися новых знаний как продуктов их активной поисково-исследовательской деятельности, активизирующей как рациональные уровни мышления, так и глубинные его механизмы, имеющие внерациональную природу. А значит, он в развитии их поисково-исследовательской деятельности. А значит, он в разнообразии предметов такой деятельности, в разнообразии ее форм и уровней. В конечном счете, это путь превращения познавательной деятельности учащихся в творческую деятельность[7], в личностное творчество. Это и сопутствие учителя как наставника.

---

[7] С этим естественно соотнести сказанное ранее о развивающей роли разных способов решения одной и той же задачи и их сопоставлениях как об эффективном средстве обучения и самообучения, как об эффективном средстве формирования настроя учащихся на творческое отношение к решаемым задачам.

***

В качестве полезного дополнения рассмотрим несколько простых диофантовых уравнений. Рассмотрение даже таких уравнений несет широкое разнообразие развивающих средств. Оно эффективно помогает развитию способностей учащихся усматривать особенности форм уравнений и использовать их для поиска решений. Такие способности формируются не «отдельно», а как органичные компоненты целостных процессов поисково-исследовательской деятельности, несущей освоение алгебраической знаковой системы как ее орудийной системы.

Какие механизмы способствуют тому, чтобы обретаемые при этом умения и навыки не «привязывались» лишь к ситуациям, близким рассмотренным и раскрывали свою общность? Этому способствует несомое знаковыми формами метапредметное начало. Как уже было сказано, знаковые формы не просто замещают исследуемое содержание. Уже только само это «замещение» есть восхождение на метапредметный уровень, на уровень исследования не просто предметного содержания в его заданности, но и формы его исследования, часто «подсказываемой» этой знаковой формой. Даже тривиальные преобразования знаковой формы, целесообразность которых усматривается благодаря хорошей ее обозримости как целого, несут переходы к новым тактикам внимания, отвечающим преобразованиям направлений и способов поисковой деятельности.

Несомое знаковой формой метапредметное начало поднимает рассмотрения на надситуативный, на надконтекстный, а посредством этого на потенциально поликонтекстный уровень. Разнообразие, разнохарактерность рассматриваемых при этом ситуаций «очищает» скрытое частностями предметного уровня метапредметное начало и превращает его в общую идею, в символ.

Немаловажно, однако, приобщение учащихся и к таким ситуациям, когда задачи, выражаемые, казалось бы, близкими знаковыми формами, кричаще различаются уровнями сложности их решений. Пример такой ситуации рассматривается в конце статьи.

Задача Д1. Найти все целочисленные решения уравнения $3x^2+4y^2=84$ (то есть узнать, сколько точек с целочисленными координатами на эллипсе, определяемом в декартовой системе координат этим уравнением).

Предлагаемый характер решения этой и ряда последующих задач показывает возможный путь обучения учащихся, направленного на возрастание их умения усматривать все более скрытые особенности рассматриваемого знакового выражения и использовать их для все большей рационализации решения задачи. В этой задаче процесс рационализации состоит во все большем сокращении количества проб.

Не видно, как преобразовать это уравнение к виду, проясняющему путь его решения. Остается искать его решение методом проб, то есть подставляя в него разные пары (x_0, y_0) целых чисел.

Пара (x_0, y_0) является решением этого уравнения, только если пара $(|x_0|, |y_0|)$ является его решением. А значит, можно ограничиться испытанием пар неотрицательных целых чисел. Заметим также, что никакая пара $(0, y_0)$, где y_0 – целое число, не является решением нашего уравнения: при ее подстановке в это уравнение, получаем равенство $4y_0^2=84$, которому не удовлетворяет никакое целое значение y_0. И никакая целочисленная пара $(x_0, 0)$ не является решением.

Значит, можно ограничиться испытанием натуральных пар, то есть пар натуральных чисел.

Но таких пар бесконечно много. А ограничиваясь лишь несколькими парами, мы рискуем потерять какие-нибудь решения.

Здесь целесообразно обратиться к геометрической интерпретации рассматриваемой задачи. Искомые решения представимы как точки эллипса с целочисленными парами координат. Так как эллипс расположен в ограниченной части координатной плоскости, то множество таких решений конечно. Так как эллипс, определяемый заданным уравнением, симметричен относительно осей координат, то для отыскания всех таких его точек достаточно найти те из них, которые расположены, например, в первом квадранте.

Пусть (x_0, y_0) – натуральное решение этого уравнения. Тогда $3x_0^2 \leq 84$, а значит, $x_0^2 \leq 28$, откуда $x_0 \leq 5$ (ведь x_0 – целое число). Аналогично доказывается, что $y_0 \leq 4$. Эти рассуждения делают ясным, что всякое уравнение $ax^2+by^2=c$, где a и b натуральные числа, имеет лишь конечное множество целочисленных решений.

Итак, множество всех натуральных решений, то есть таких, которые являются парами целых положительных чисел, есть часть следующего множества M из 20 пар:

$$
\begin{array}{c}
(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1,4) \\
(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4)
\end{array}
$$

M – множество всех таких точек с натуральными координатами, которые расположены на прямоугольнике, внутри которого расположен эллипс $3x^2+4y^2=84$, и внутри его. Большинство их (если не все они) не относится к искомым решениям. Использование каких особенностей уравнения позволило бы отсеить заметную часть этих пар?

Естественно использовать следующие очевидные замечания: если для какой-то из этих пар (x_0, y_0) окажется, что $3x_0^2+4y_0^2<84$, то все пары из следующей части этой таблицы не являются решениями:

$$
\begin{array}{c}
(1, 1), \dots (1, \; y_0) \\
\dots\dots\dots\dots\dots \\
(x_0, 1), \dots (x_0, y_0)
\end{array}
$$

Ведь для каждой такой пары (a, b) будет $3a^2+4b^2<84$. Если же окажется, что $3x_0^2+4y_0^2>84$, то все пары из следующей части этой таблицы не являются решениями:

$$
\begin{array}{c}
(x_0, y_0), \dots, (x_0, 4) \\
\dots\dots\dots\dots\dots \\
(5, y_0), \dots , (5, 4)
\end{array}
$$

Поэтому проверку целесообразно начинать с какой-нибудь пары, расположенной близко к центру таблицы.

> Заметим, что возможность использования описанного способа сокращения количества проб открывает подходящее для этого знаковое средство, а именно использованная табличная форма записи рассматриваемых пар чисел. За этим способом стоит следующий геометрический факт: чем ближе точка эллипса $3x^2+4y^2=84$ к одной из осей координат, тем она дальше от другой.

Для сокращения количества проб можно воспользоваться и тем, что уравнение можно записать так: $3x^2=4(21-y^2)$. Отсюда ясно, что всякое его решение (x_0, y_0) таково, что x_0 – четное число. Следовательно, вместо таблицы из 20 пар можно ограничиться следующей ее частью:

$$(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4)$$
$$(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)$$

Рассматриваемое уравнение можно записать и так: $4y^2=3(28-3x^2)$. Отсюда ясно, что всякое его решение (x_0, y_0) таково, что y_0 делится на 3. Значит, вместо последней таблицы можно ограничиться третьим ее столбцом. Пара (4, 3) является единственным натуральным решением нашего уравнения. Значит, у него 4 целочисленных решения: (4, 3), (–4, 3), (4, –3) и (–4, –3).

А вот более короткое решение задачи. Заданное уравнение равносильно следующему: $3x^2=84-4y^2$. Отсюда ясно, что его натуральными решениями могут быть только такие пары (a, b), что a четное, то есть такие, что $a=2c$ для натуральных c. Из истинности равенства $12c^2+4b^2=84$ следует истинность равенства $b^2=21-3c^2$. Значит, b делится на 3, то есть $b=3d$ для натурального d. Следовательно, истинно равенство $3c^2+9d^2=21$, откуда $c\le2$ и $d\le1$. Таких пар две: (1, 1) и (2, 1). И только пара (2, 1) удовлетворяет последнему равенству. А значит, только пара (4, 3) может быть натуральным решением заданного уравнения. Она действительно является его решением.

Задача Д2. Найти множество всех целочисленных решений уравнения $3x^2+6x+5y^2=37$.

Это уравнение преобразуемо в следующее: $3u^2+5y^2=40$, где $u=x+1$. Никакие пары видов $(u_0, 0)$ и $(0, y_0)$, где u_0 и y_0 целые числа, не являются решениями этого уравнения. А значит, задача сводится к отысканию множества всех натуральных его решений, каковыми могут быть только такие пары (u_0, y_0), что $u_0\le3$ и $y_0\le2$. Таких пар 6. Пары видов $(u_0, 1)$ и $(1, y_0)$ не являются его решениями. А значит, решениями могут быть только пары вида $(u_0, 2)$. Это (2, 2) и (3, 2). Они не являются решениями. Значит, множество целочисленных решений этого уравнения пустое.

А вот иной подход к решению уравнения $3u^2+5y^2=40$. Это уравнение можно записать так: $3u^2=5(8-y^2)$, откуда следует, что его натуральными решениями могут быть только такие пары (u_0, y_0), что u_0 делится на 5. Отсюда и из $u_0\le3$ следует, что множество целочисленных решений этого уравнения пустое. Ведь пары $(0, y_0)$ не являются его целочисленными решениями.

Задача Д3. Найти множество всех целочисленных решений уравнения $3x^2+2y^2=99$.

Задача Д4. Доказать, что уравнение $x^5-x-2y^2=227$ не имеет целочисленных решений.

При любых целых значениях x и y левая часть этого уравнения принимает четные значения, а правая – нечетное. Значит, уравнение не имеет целочисленных решений.

Задача Д5. Найти множество всех целочисленных решений уравнения

$$5x^8-12y^3=150$$

Уравнение равносильно следующему: $5x^8=150+12y^3$, или $5x^8=6(2y^3+25)$. Это делает очевидным, что для всякого его решения (a, b) a делится на 6, то есть что $a=6d$ для подходящего целого d, а значит, что имеет место равенство $5\cdot6^8d^8=6(2b^3+25)$, а потому и равенство $5\cdot6^7d^8=2b^3+25$. Но это равенство ложное, так как его левая часть четная, а правая нечетная. Значит, множество всех целочисленных решений заданного уравнения пустое.

Задача Д6. Найти множество всех целочисленных решений уравнения

$$2x^6–3y^7+9y^4–18y^2=123661.$$

При любых целых значениях x и y остаток при делении левой части уравнения на 3 тот же, что и при делении $2x^6$ на 3. Он равен 0 или 2. А остаток при делении на 3 правой части равен 1. И потому множество всех целочисленных решений уравнения пустое.

Задача Д5. Найти множество всех целочисленных решений уравнения

а) $x^2+y^2=25$; б) $x^2+9y^2=25$; в) $25x^2–9y^2=16$; г) $x^2+y^2=169$;
д) $169x^2–y^2=144$.

Задача Д6. Найти множество всех целочисленных решений уравнения $4x^2–3y^2=42$.

Для всякого целочисленного решения (x_0, y_0) этого уравнения из истинности равенства $3y_0^2=4x_0^2–42$, следует, что y_0 четное и что поэтому y_0^2 делится на 4, а значит, что левая часть уравнения делится на 4. Но так как правая часть на 4 не делится, это равенство ложное. Следовательно, множество всех целочисленных решений этого уравнения есть пустое множество.

Задача Д7. Доказать, что уравнение $ax^n–by^n=0$ с взаимно простыми натуральными коэффициентами имеет натуральные решения тогда и только тогда, когда эти коэффициенты являются n-ми степенями натуральных чисел.

Задача Д8. Доказать, что уравнение $x^5–x–2y^2=227$ не имеет целочисленных решений.

При любых целых значениях x и y левая часть этого уравнения принимает четные значения, а правая – нечетное. Значит, уравнение не имеет целочисленных решений.

Задача Д9. Доказать, что уравнение $x^3–8y^7+120y^5–16y=123662$ не имеет целочисленных решений.

Допустим, что какая-то пара целых чисел (a, b) является решением заданного уравнения, то есть что истинно равенство $a^3–8b^7+120b^5–16b=123662$, то есть истинно равенство $a^3=8b^7–120b^5+16b–123662$, правая часть которого четная. Значит, a четное, и потому a^3 делится на 8. Левая часть равенства делится на 8, а правая не делится и потому наше допущение неверное.

Задача Д10. Для каких натуральных c уравнение

$$x^2–y^2=c \quad (*)$$

имеет бесконечное множество целочисленных решений?

(Иначе говоря, для каких натуральных c у гиперболы, определяемой в декартовой системе координат уравнением вида (*), бесконечно много точек с целочисленными координатами?)

Если (x_0, y_0) – решение такого уравнения, то есть если истинно равенства $x_0^2–y_0^2=c$, или $(x_0–y_0)(x_0+y_0)=c$, то $x_0–y_0$ и x_0+y_0 являются делителями c. Но такие пары делителей образуют конечное множество (это легко доказывается использованием основной теоремы арифметики). А значит, всякое уравнение вида (*) имеет конечное множество целочисленных решений.

Задача Д11. Для каких натуральных c уравнение (*) имеет целочисленные решения?

Воспользуемся идеей решения задачи Д10. То, что (x_0, y_0) – решение такого уравнения, то есть что истинно равенство $(x_0–y_0)(x_0+y_0)=c$, влечет, что $x_0–y_0$ и x_0+y_0 являются делителями числа c одной и той же четности, а значит, что для существования решений уравнения (*) необходимо, чтобы c было либо нечетным, либо делящимся на 4. Это условие и достаточно. В самом деле, если c делится на 4, то система

$$x–y=2$$
$$x+y=c/2$$

имеет целочисленное решение, являющееся решением этого уравнения. А если c нечетно, то система

$$x–y=1$$
$$x+y=c$$

имеет целочисленное решение, которое является решением этого уравнения.

Задача Д.12. Доказать, что для всякого рационального c уравнение $x^2–y^2=c$ имеет рациональные решения.

Подсказка: воспользоваться идеей решения задачи Д11.

Задача Д13. Доказать, что если c нечетное, то уравнение (*) имеет целочисленное решение вида $(x_0, x_0–1)$).

Задача Д14. Доказать, что для всякого натурального n существует уравнение вида (*), имеющее не менее n целочисленных решений.

Задача Д15. Доказать, что уравнение $x^4–y^4=p$, где p простое число, не имеет целочисленных решений.

Подсказка: воспользоваться идеей решения задачи Д11.

Задача Д17. Найти множество всех целочисленных решений уравнения $x^3–y^3=61$.

Решение следующих ниже задач основывается на использовании следующего очевидного замечания: каждая из следующих задач, где a, b и c натуральные числа, сводима к любой другой из них:

a) найти множество всех точек с рациональными координатами на эллипсе $ax^2+by^2=c$;
b) найти множество всех точек с рациональными координатами на гиперболе $cx^2–by^2=a$;
c) найти множество всех точек с рациональными координатами на конусе $ax^2+by^2=cz^2$;
d) найти множество всех точек с целочисленными координатами на конусе $ax^2+by^2=cz^2$.

Задача Д17. Найти множество всех рациональных решений уравнения

$$x^2+y^2=1 \quad (**)$$

(Иначе говоря, найти множество всех точек окружности $x^2+y^2=1$, имеющих рациональные координаты).

Целочисленными решениями этого уравнения являются все пары (1, 0), (–1, 0), (0, 1), (0, –1) и только они. Но существуют ли иные рациональные его решения?

$3^2+4^2=5^2$. Отсюда $(3/5)^2+(4/5)^2=1$. А значит, все пары (±3/5, ±4/5) и (±4/5, ±3/5) являются рациональными решениями этого уравнения.

$5^2+12^2=13^2$. Отсюда $(5/13)^2+(12/13)^2=1$. А значит, все пары (±5/13, ±12/13) и (±12/13, ±5/13) являются рациональными решениями этого уравнения.

Каждой пифагоровой тройке, то есть такой тройке натуральных чисел (m, n, p), что $m^2+n^2=p^2$, соответствует 8 рациональных решений уравнения (**).

Таких троек бесконечно много. Даже одна пифагорова тройка (m, n, p) «порождает» бесконечное множество новых таких троек вида (mq, nq, pq), где q– какое-нибудь натуральное число. Всем таким тройкам соответствуют одна и та же восьмерка рациональных решений уравнения.

Но конечно или бесконечно множество всех рациональных решений уравнения? И как много существенно разных пифагоровых троек?

Уточним формулировку последнего вопроса. Две тройки натуральных чисел назовем подобными если они «порождены» какой-то одной и той же тройкой (m, n, p), то есть если для каких-то натуральных чисел r и s одна из них есть (mr, nr, pr), а другая – (ms, ns, ps). Для каждой пифагоровой тройки существует наибольший класс подобных ей пифагоровых троек. Это класс всех троек, порожденных подобной ей *примитивной* тройкой, то есть такой, что наибольший общий делитель ее членов равен 1. Формулировку последнего вопроса естественно уточнить так: как много примитивных пифагоровых троек?

Еще Пифагор открыл, что для всяких натуральных взаимно простых чисел m и n<m, имеющих разные четности, все тройки

$$(m^2–n^2, 2mn, m^2+n^2) \quad (***)$$

и только они являются пифагоровыми тройками. Таких троек бесконечно много. А так как разным примитивным пифагоровым тройкам соответствуют разные рациональные решения уравнения (**), то таких решений бесконечно много.

Всякое рациональное решение уравнения (**) соответствует определенной (примитивной) пифагоровой тройке. В самом деле, пусть (u, v) – пара положительных рациональных чисел, являющаяся решением этого уравнения. Приведем дроби, представляющие эти числа, к общему знаменателю. Пусть $u=m/p$, $v=n/p$. Равенство $(m/p)^2+(n/p)^2=1$ равносильно равенству $m^2+n^2=p^2$. Отсюда ясно, что решение (u, v) уравнения (**) соответствует пифагоровой тройке (m, n, p).

Таким образом множество всех рациональных решений уравнения (**) состоит их пар (1, 0), (–1, 0), (0, 1), (0, –1) и всех рациональных его решений, соответствующих пифагоровым тройкам.

Задача Д18. Найти множество всех рациональных решений уравнения $x^2–y^2=1$.

Пусть $m^2+n^2=p^2$. Тогда $p^2–m^2=n^2$. Отсюда $(p/m)^2–(m/n)^2=1$. Отсюда же (и из того, что всякое рациональное решение уравнения $x^2–y^2=1$, не являющееся целочисленным, соответствует определенной (примитивной) пифагоровой тройке) ясно, что решение задачи Д18 сводится к решению задачи Д17.

> Представляется целесообразным хотя бы только обратить внимание школьников, например, на следующую непростую для них (и не только для них) задачу: исследовать, всюду ли плотно на окружности $x^2+y^2=1$ расположены рациональные точки, то есть точки с рациональными координатами, иначе говоря, исследовать, на любом ли ее куске, каким бы малым он ни был, имеются такие точки. Полезным для них было бы обращение, например, и к следующим задачам:
>
> * Имеются ли конечные куски гиперболы $x^2–y^2=1$ с бесконечными множествами рациональных точек?
>
> ** Имеются ли на этой гиперболе рациональные точки, как угодно далекие от начала координат?
>
> Обращенность школьника к таким задачам приведет его к поиску такого их переистолкования, которое открыло бы возможность использовать для их решения освоенные им знания и умения. Такой поиск сопровождается дальнейшим освоением знаковых средств как орудий поисково-исследовательской деятельности. Такие задачи играют роль

стимулятора дальнейшего самообучения школьника, стимулятора его саморазвития, стимулятора, несущего превращение *у*сваиваемого им в *о*сваиваемое, в живое знание. Уже только попытки решения подобных задач способствуют его математическому развитию.

А теперь обратимся к следующей задаче: найти множество всех рациональных решений уравнения а) $x^3+y^3=1$; б) $x^3-y^3=1$

Целочисленными решениями уравнения, а) являются пары (0, 1) и (1, 0), а уравнения б) – (1, 0) и (0, –1). Ясно и то, что все не целые рациональные решения этих уравнений – это все те и только те, которые отвечают тройкам, подобным пифагоровым, то есть таким тройкам (m, n, p) натуральных чисел, что $m^3+n^3=p^3$, и что поиск решений уравнения б) сводится к поиску решений уравнения, а).

При всей похожести видов уравнений, а) и $x^2+y^2=1$ уровни сложности рассматриваемой задачи и задачи Д17 существенно различны. Почти четыреста лет назад Пьер Ферма высказал утверждение, широко известное как великая теорема Ферма: для всякого натурального $n>2$ уравнение $x^n+y^n=z^n$ не имеет натуральных решений. Оно было полностью доказано далеко не элементарными современными средствами только в 1994 году Э. Уайлсом. Из него следует, что для всякого $n>2$ множество всех рациональных решений уравнения, а) состоит из пар (0, 1) и (1, 0) для n нечетных n и пар (0, ±1) и (±1, 0) для n четных.

История поисков доказательства великой теоремы Ферма является далеко не единственным прецедентом, показывающим, что за простой формой постановки задачи может скрываться высочайший уровень сложности ее решения и что за близостью форм постановок задач может скрываться кричащее различие уровней сложности их решений.

Задача Д19. Найти множество всех рациональных решений уравнения

а) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$; б) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=1$.

Библиографический список

1. *Величковский Б. М.* Современная когнитивная психология. М.: Изд-во Московского государственного университета, 1982. 336 с.

2. *Выготский Л. С.* История развития высших психических функций // Выготский Л. С. Собрание сочинений. Т. 3. М.: Педагогика, 1983. С. 5–90.

3. *Гуссерль Э.* Логические исследования. Картезианские размышления. Минск: Харвест; Москва: Аст, 2000. 750 с.

4. *Давыдов В. В.* Теория развивающего обучения. М.: ИНТОР, 1996. 554 с.

5. *Когаловский С. Р.* О ведущих планах обучения математике // Педагогика. 2006. № 1. С. 39–48.

6. *Когаловский С. Р.* Из беседы с учителем // Когаловский С. Р. Поиски метода и методы поиска (онтогенетический подход к обучению математике). Часть II. Шуя: изд-во ШГПУ, 2008. С. 327–342.

7. *Когаловский С. Р.* Математика в свете идеи моделирования, идея моделирования в свете математики (второе, расширенное издание). Иваново: Иван. гос. ун-т, 2017. 258 с.

8. *Когаловский С. Р.* О природе математики // Философские науки. 2017. № 6. С. 80–95.

9. *Когаловский С. Р.* Математика и логика // Научный поиск. 2018. № 1 (27). С. 51–54.

10. *Когаловский С. Р.* Об одном частном методическом вопросе. // Вестник Ивановского государственного университета. Серия: Естественные, общественные науки. 2021. Вып. 2. С. 50–56.

11. *Лосев А. Ф.* Диалектика творческого акта (краткий очерк) // Контекст-81. М.: Наука, 1982. С. 48–78.

12. *Моррис Ч.* Основания теории знаков // Семиотика. М.: Радуга, 1983. С. 37–89.

13. *Назиев А. Х.* Что такое параметр? // Развитие общего и профессионального математического образования в системе национальных университетов и педагогических вузов: материалы 40-го Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов 7–9 октября 2021 г. Брянск: Изд-во ИП Худовец Р. Г., 2021. С. 41–44.

14. Научное творчество: сборник статей. М.: Наука, 1969. 445 с.

15. *Непомнящая Н. И.* Педагогический анализ и конструирование способов решения учебных задач // Георгий Щедровицкий, Вадим Розин, Никита Алексеев, Нелли Непомнящая. Педагогика и логика. М.: Касталь, 1993. С. 306–377.

16. *Поддьяков Н. Н.* Основное противоречие развивающейся психики ребенка. Краснодар, 1997. 58 с.

17. *Раков В. П.* Меон и стиль. Иваново; Шуя: Изд-во ШГПУ, 2010. 448 с.

18. *Янковская Е. А.* Гетерархический принцип устройства познавательного опыта: дис. … канд. филос. наук. Ивановская химико-технологическая академия, 2009. 22 с.

Информация об авторе / Information about the author

Когаловский Сергей Рувимович – кандидат физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математики, информатики и методики обучения, Шуйский филиал Ивановского государственного университета, г. Шуя, Россия, askogal@yandex.ru

Kogalovsky Sergey Ruvimovich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Mathematics, Computer Science and Teaching Methods, Shuya Branch of Ivanovo State University, Shuya, Russia, askogal@yandex.ru

УДК 372.851

С. Р. Когаловский

О ПОЛНОТЕ ЧИСЛОВОЙ ПРЯМОЙ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Описывается путь, ведущий школьника от элементарной задачи и анализа ее «очевидного» решения к открытию и эффективному использованию полноты (упорядоченного) множества **R** действительных чисел. Приводимые строгие доказательства ряда ведущих теорем, относящихся к началам анализа, отличаются от традиционных и доступны для школьников. Таковы доказательства теоремы Вейерштрасса о свойствах функций, непрерывных на отрезках, и признаков монотонности функций, непосредственно обращающиеся к полноте **R**. Постулируя полноту прямой, мы доказываем изоморфизм числовой прямой и R как упорядоченных множеств.

Ключевые слова: полнота **R**, разные формы представления полноты **R**, функции, непрерывные на отрезках: равномерная непрерывность, признаки монотонности, теорема Лагранжа о конечных приращениях.

S. R. Kogalovskii

ON THE COMPLETENESS OF THE NUMERICAL LINE IN THE SCHOOL MATHEMATICS COURSE

The path leading a student from an elementary problem and the analysis of its "obvious" solution to the discovery and effective use of the completeness of the (ordered) set R of real numbers is described. The proofs given for a number of leading theorems related to the beginnings of analysis differ from the traditional ones and are more accessible to schoolchildren. These are, in particular, the proofs of the Weierstrass theorem on the properties of functions continuous on segments and signs of monotonicity of functions, directly deduced from the completeness of R. Postulating the completeness of the line, we prove the isomorphism of the numerical line and R as ordered sets.

Keywords: completeness of R, different forms of representation of completeness of R, functions continuous on segments: uniform continuity, signs of monotonicity, Lagrange's theorem on finite increments.

Структура **R** действительных чисел, лежащая в основе начал анализа, является гибридом алгебраической, порядковой и топологической структур. Изучение начал анализа предполагает освоение механизмов исследования таких структур и их взаимодействий. Оно не может не предполагать постижения и развития поли-интуитивной «подпочвы» этих механизмов, ведущего к ее превращению в носителя строгости обоснований. Другой стороной последнего является превращение этих механизмов в эффективное орудие поисково-исследовательской деятельности и в «средство производства» таких орудий. Отвечающее этому обучение – это развивающееся освоение развивающегося предмета. Такому духу обучения должно следовать обучение математике школьников. Такому духу обучения в особой степени должна следовать подготовка будущих учителей математики, и не только математики.

В статье рассматривается модель занятий со старшими школьниками и со студентами-математиками педагогических вузов, направленных на «прояснение» фундамента, на котором строятся начала анализа. Она представлена в форме конспекта сценария занятий. Слово «прояснение» взято в кавычках не случайно: «прояснение» – это не просто выявление перво-интуиций, перво-образов, перво-механизмов математической деятельности. Это построение их продуктивной модели, обогащенной новой интуитивной «подкладкой», той, которая направляла формирование этой модели. При этом учащиеся приводятся к осознанию того, что «прояснение» – это моделирование. Обычно же осуществляется «онтологизация» сформированной модели как «подмена» изучаемого объекта этой его моделью. Такая «подмена» не осознается учащимися как «подмена», и потому утрачивается возможность их усмотрения в сформированной модели лишь одного из многих возможных вариантов продуктивных моделей этого объекта. А такая утрата рождает квазиплатонистское понимание природы математических понятий и тем уводит от понимания того, что фундаментальные математические понятия являются продуктами творческой деятельности, их длительной, многопоколенной огранки. Она уводит учащихся от продуктивных стратегий освоения таких понятий, от освоения продуктивных стратегий математической деятельности.

Обращение к полноте **R**, выражаемой с помощью дедекиндовых сечений, несет непосредственно воплотимые возможности перевода рассматриваемых локальных свойств функций, определенных на промежутках, в глобальные их свойства. Эта возможности существенно расширяются благодаря использованию и других форм выражения полноты **R**. Все они являются формами выражения компактности естественной топологии на отрезках **R**. Используя их, мы находим, в частности, прямые, опирающиеся на полноту **R** и не опосредствованные никакими промежуточными результатами простые и строгие доказательства признака монотонности дифференцируемых функций и теорем о свойствах функций, непрерывных на отрезках. Приводится «природосообразное» доказательство теоремы Лагранжа о конечных приращениях. В заключение решается вопрос о том, из каких (геометрических) положений о свойствах числовой прямой, рассматриваемой как упорядоченное множество точек, мы явно или неявно исходим и действительно ли эти положения влекут, что числовая прямая и **R** изоморфны как упорядоченные множества.

Бóльшая часть предлагаемых задач предназначается для самостоятельного решения учащимися как средство освоения ими теоремы полноты, не только несущей обоснование теорем, относящихся к началам анализа, но и являющейся эффективным базисным орудием исследований и «средством производства» таких орудий. Их оправдание и в том, что бóльшая доступность и бóльшая эффективность обучения в старшей школе и вузе достигается не опрощением изучаемого предмета, а наращиванием многомерности и многоуровневости учебной деятельности и тем восхождением к сложности, присущей природосообразным процессам восхождения к развитым ее формам, к формам восхождения к предметной и метапредметной конкретности. Трудности в обучении математике создаются не столько сложностью природы математической деятельности, сколько уходом от нее, подавляющим активизацию и развитие механизмов понимания разных уровней и их взаимодействий, и формирование необходимых функциональных органов.

К написанию настоящей статьи меня побудили недавние доклады профессора П. В. Семенова на научных семинарах (см. [3] и [4]). В ней изложены результаты, полученные в 2000-м году и апробированные в обучении школьников и студентов ШГПУ. Впервые эти результаты были опубликованы в 2006 году в [1] (см. также [2]). В настоящей статье они дополнены значимыми задачами-теоремами. Результаты статьи не только усиливают результаты, полученные П.В. Семеновым, но и снабжены доказательствами, доступными не только студентам-математикам, но и школьникам. Отмечу также отличие целей, преследуемых в статье, и стоящих за ними методологических и методических установок от тех, которым следовал В.П. Семенов.

Полнота множества действительных чисел

Эта часть статьи посвящена открытию теоремы полноты и различным формам ее представления**.**

Числовым промежутком или *промежутком* будем называть всякое такое множество (действительных) чисел, что вместе со всякими принадлежащими ему числами a и b>a ему принадлежит всякое такое число c, что a<c<b.

Говорят, что промежуток I *ограничен справа* (слева), если имеется число, большее (меньшее) всех чисел из I. Промежуток называют *ограниченным*, если он ограничен и справа и слева.

Промежуток называют *открытым*, если у него нет ни наименьшего, ни наибольшего числа.

– Зачем вводить термин «открытый промежуток», если уже есть термин «интервал»? Ведь открытый промежуток – это интервал. Это очевидно!

– Так ли это очевидно? Будем рассматривать промежутки на множестве Q рациональных чисел. Является ли интервалом на Q промежуток на Q, состоящий из всех рациональных чисел, заключенных между 0 и √2? Иначе говоря, существует ли такое рациональное число a, что этот промежуток есть (0, a)?

– Таким a является наименьшее из рациональных чисел, больших √2.

– Но такого рационального числа не существует. Какое бы иррациональное число α и рациональное число a>α мы ни взяли, существует такое рациональное число b, что α<b<a. Действительно, пусть β – среднее арифметическое a и α. Среди десятичных приближений этого иррационального числа, меньших a, имеются такие, которые больше α.

– Но всякий ли открытый промежуток на множестве R всех действительных чисел является интервалом?

– Этот вопрос мы попытаемся разрешить вместе с другими, не менее важными «очевидными» вопросами.

Говорят, что набор промежутков является *покрытием* множества чисел M, если всякое число из M принадлежит какому-нибудь промежутку из этого набора.

Всякая часть покрытия множества M, также являющаяся его покрытием, называется *подпокрытием* этого покрытия.

– Верно ли, что если функция f убывает (возрастает) на промежутках I и J, покрывающих ее область определения, то f – убывающая (возрастающая) функция?

– Примером того, что это не всегда так, является функция y=1/x.

– Заметим, однако, что область определения этой функции не является промежутком.

Задача 1.1. Верно ли, что если промежуток K покрывается парой открытых промежутков I и J, на которых функция f возрастает (убывает), то f возрастает (убывает) на K?

– Это верно. Пусть, например, f возрастает на I и на J. Тогда для всяких чисел a и $b>a$ из K имеет место $f(b)>f(a)$. Действительно, если a и b оба принадлежат I или J, то это неравенство имеет место по условию. Пусть a принадлежит I и не принадлежит J и пусть b принадлежит J и не принадлежит I. Выберем какое-нибудь число c из общей части I и J, то есть такое, что $a<c<b$. Так как a и c принадлежат I, в котором f возрастает, то $f(a)<f(c)$. А так как c и b принадлежат J, в котором f тоже возрастает, то $f(c)<f(b)$. Из $f(a)<f(c)$ и $f(c)<f(b)$ следует $f(a)<f(b)$.

– Это доказательство опирается на предположение о существовании общего числа у I и J. Но верно ли, что если два открытых промежутка покрывают какой-нибудь промежуток, то они налегают друг на друга, то есть имеют общие числа?

– Предположим, что это не так. Так как I и J не налегают друг на друга, то правый конец c левого из них и левый конец d правого совпадают. (Ведь в противном случае интервал (c, d), входящий в K, не покрывался бы этими промежутками). И этот общий их конец не принадлежит ни I, ни J. Но ведь он принадлежат промежутку K, покрываемому I и J. Пришли к противоречию.

– Это доказательство опирается на предположение, что у промежутка, ограниченного справа, то есть такого, что имеются числа, расположенные справа от него, есть правый конец (не обязательно ему принадлежащий), а у промежутка, ограниченного слева, – левый конец.

– Всякий промежуток есть отрезок, интервал или полуинтервал. В самом деле, если у промежутка есть принадлежащие ему концы, то есть наименьшее и наибольшее его числа, то он отрезок. Если у него, например, нет принадлежащего ему правого конца, но есть левый, то он полуинтервал. Если же у него нет ни левого, ни правого конца, ему принадлежащего, то он интервал.

Пусть, например, I – ограниченный слева и справа промежуток, a – наибольшее из чисел, меньших всех чисел из I, a b – наименьшее из чисел, больших всех чисел из I. Ясно, что I – интервал (a, b).

– Но откуда видно, что такие числа a и b существуют, то есть что всякий открытый промежуток есть интервал?

– Если бы такого числа b не было, то на множестве всех чисел была бы «щель» между I и куском, состоящим из всех чисел, лежащих справа от I. Но множество чисел сплошное. Оно представимо как прямая, как числовая прямая. В нем нет «щелей». Иначе говоря, если два ее промежутка «примыкают» друг к другу, то они имеют общий конец, принадлежащий одному из них.

– Но действительно ли множество чисел сплошное? Это кажется очевидным лишь в силу привычности укоренившихся у нас представлений о числовой прямой. История математики знает не один пример ложности широко распространенных представлений. Она свидетельствует и о том, что прояснение таких «очевидных» фактов (а прежде всего тех из них, которые образуют «подпочву» математической деятельности), отыскание их обоснования открывает новые горизонты.

Однако, возвратимся к вопросу о том, действительно ли верно то, что если ограниченный справа промежуток не имеет наибольшего числа, то существует наименьшее из чисел, больших всех чисел этого промежутка.

Пусть промежуток I не имеет наибольшего числа, K – промежуток, состоящий из чисел, больших всех чисел из I. Попытаемся доказать, что существует наименьшее число в K.

Вначале рассмотрим случай, когда I содержит положительные числа. Будем рассматривать их представления в виде десятичных дробей. Так как I ограничен справа, то среди целых частей чисел из I существует наибольшая (согласно следующему предложению, равносильному принципу индукции: во всяком ограниченном множестве натуральных чисел есть наибольшее число). Обозначим ее через a_0. Через I^0 обозначим множество тех чисел из I, у которых целая часть равна a_0. Наибольший из первых десятичных знаков после запятой у этих чисел обозначим через a_1. Через I^1 обозначим множество всех чисел из I^0, у которых первый десятичный знак после запятой равен a_1. Наибольший из вторых десятичных знаков после запятой у чисел из I^1 обозначим через a_2. Через I^2 обозначим множество всех чисел из I^1, у которых второй десятичный знак после запятой равен a_2. Наибольший из третьих знаков после запятой у этих чисел обозначим через a_3. И т. д. Этот процесс является неограниченно продолжаемым. (Предположение, что на каком-то, скажем, n-ом, шаге он прервется, будет означать, что $a_0,a_1a_2\ldots a_n$ – наибольшее число в I. Но это противоречит условию). Продолжая этот процесс, мы будем один за другим определять десятичные знаки некоторого числа a. Ясно, что a не меньше любого числа из I. А значит, $a \in K$.

a – наименьшее число из K. Действительно, пусть $b=b_0,b_1b_2\ldots$ – какое-нибудь положительное число, меньшее a. Если $b_0 < a_0$, то b меньше каких-то чисел из I^0, а значит, не принадлежит K. Пусть $b_0=a_0$. Если $b_1<a_1$, то b меньше чисел из I^1, а значит, не принадлежит K. Пусть $b_0=a_0$, $b_1=a_1$, ..., $b_m=a_m$, но $b_{m+1}<a_{m+1}$. Тогда b меньше чисел из I^{m+1}, а значит, не принадлежит K. И т. д. Таким образом, никакое число, меньшее a, не принадлежит K. Следовательно, a – наименьшее из чисел, больших всех чисел из I.

Теперь рассмотрим случай, когда I не содержит положительных чисел. Ясно, что существует такое натуральное число n, что промежуток $J=\{x+n: x \in I\}$ содержит положительные числа. Как и I он ограничен и не имеет наибольшего числа. По доказанному выше, существует наименьшее число a, большее всех чисел из J. Тогда a–n является наименьшим числом из K, состоящего из чисел, больших всех чисел из I.

Итак, справедлива

Лемма 1.1. Если I – промежуток, ограниченный справа и не имеющий наибольшего числа, то существует наименьшее число, большее всех чисел из I.

Лемма 1.1 равносильна (или, что то же, эквивалентна) следующему предложению: Если I – промежуток, ограниченный слева и не имеющий наименьшего числа, то существует наибольшее число, меньшее всех чисел из I. Действительно, пусть I не имеет наименьшего числа. Тогда $I^*=\{-x/x \in I\}$ – промежуток, не имеющий наибольшего числа. Согласно лемме 1 существует наименьшее число b, большее всех чисел из I*. Ясно, что $-b$ – наибольшее число, меньшее всех чисел из I. Аналогично лемма 1 выводится из этого предложения.

Говорят, что промежутки I и J, покрывающие третий промежуток, образуют его *сечение*, если у них нет общих чисел.

Легко доказывается, что лемма 1.1 равносильна следующей теореме:

Теорема 1 (теорема полноты). Всякое сечение числового промежутка таково, что либо в левом из образующих его промежутков есть наибольшее число, либо в правом есть наименьшее**.**

В частности, всякое сечение множества всех (действительных) чисел R таково, что либо в левом из образующих его промежутков есть наибольшее число, либо в правом наименьшее**.**

Заметим, что теорема 1 становится ложной для множества Q всех рациональных чисел. В самом деле, пусть α – какое-нибудь иррациональное число, I – множество всех рациональных чисел, меньших α, а J – множество всех рациональных чисел, больших α. I и J образуют такое сечение множества всех рациональных чисел, что в I нет наибольшего числа, а в J нет наименьшего.

Из теоремы 1 легко выводится

Теорема 2. (**теорема о вложенных отрезках**). Пусть **S –** такое множество отрезков, что для любых двух из них один включается в другой. Тогда существует хотя бы одно число, принадлежащее всем этим отрезкам.

Задача 1.2. Доказать, что теорема 2 равносильна теореме 1.

Верхней гранью множества чисел M будем называть всякое такое число, которое не меньше любого числа из M. Например, всякое число $c \geq b$ является верхней гранью интервала (a, b).

Нижней гранью множества M будем называть всякое такое число, которое не больше любого числа из M. Например, всякое число $c \leq a$ является нижней гранью интервала (a, b).

Ясно, что если множество M имеет наибольшее (наименьшее) число, то это число есть его наименьшая верхняя (наибольшая нижняя) грань.

Лемма 1.2. Верхняя (нижняя) грань множества чисел M тогда и только тогда является его наименьшей верхней (наибольшей нижней) гранью, когда в любой ее окрестности имеются числа из M.

Пусть x_0 – наименьшая верхняя грань M. Если x_0 принадлежит M, то любая окрестность x_0 содержит число, принадлежащее M. Само x_0 является таким числом. Пусть x_0 не принадлежит M. Если бы какая-нибудь окрестность U этого числа не содержала точек из M, то все точки из U, в частности, те из них, которые расположены слева от x_0, были бы верхними гранями M. Но тогда x_0 не было бы наименьшей из верхних граней M.

Пусть в любой окрестности числа x_0, являющегося верхней гранью M, имеются числа из M. Тогда слева от него нет верхних граней M. А значит, это число является наименьшей верхней гранью M.

Следующее предложение является переформулировкой леммы 1.1: Если M – ограниченное справа (слева) множество, то M имеет наименьшую верхнюю (наибольшую нижнюю) грань.

Из теоремы 1 следует

Теорема 3. Всякий промежуток M есть отрезок, интервал или полуинтервал.

Пусть m_* – наименьшее, а m^* – наибольшее число из M. Тогда M есть отрезок $[m_*, m^*]$.

Пусть m_* – наименьшее число из M и M – неограниченное справа множество. Тогда всякое число $a>m_*$ входит в M. Тогда M есть полуинтервал $[m_*, +\infty)$.

Пусть m_* – наименьшее число из M и M ограничено справа, но не имеет наибольшего числа. Тогда, согласно лемме 1.1, существует наименьшая верхняя грань b этого промежутка. В этом случае M есть полуинтервал $[m_*, b)$.

Аналогично доказывается следующее:

1) если M имеет наибольшее число m^* и не ограничено слева, то M есть полуинтервал $(-\infty, m^*]$;

2) если M имеет наибольшее число m^* и ограничено слева, но не имеет наименьшего числа, то M есть полуинтервал $(m_*, m^*]$, где m_* – его наибольшая нижняя грань;

3) если M является ограниченным множеством и не имеет ни наименьшего, ни наибольшего числа, то M есть интервал (m_*, m^*), где m_* – его наибольшая нижняя грань, а m^*– наименьшая верхняя грань;

4) Если M ограничено слева, не имеет наименьшего числа и не ограничено справа, то M есть интервал $(m_*, +\infty)$, где m_* – наибольшая нижняя грань M;

5) Если Если M ограничено справа, не имеет наибольшего числа и не ограничено слева, то M есть интервал $(-\infty, m^*)$, где m^* – наименьшая верхняя грань M;

6) если M не является ни ограниченным слева, ни ограниченным справа, то M – интервал $(-\infty, +\infty)$, то есть множество всех чисел.

Задача 1.3. Доказать, что теорема 3 равносильна теореме 1.

Из теоремы 1 следует, что интервалы не могут образовывать сечение промежутка. А значит, если пара интервалов покрывает промежуток, то эти интервалы имеют общую часть. И потому если промежуток покрывается парой интервалов, на которых функция f возрастает (убывает), то f возрастает (убывает) на всем промежутке.

Задача 1.4. Пусть набор интервалов покрывает данный промежуток, и в каждом из этих интервалов функция f возрастает. Доказать, что f возрастает на всем промежутке.

Пусть a и $b>a$ – какие-нибудь числа данного промежутка. Докажем, что $f(b)>f(a)$. Пусть A – множество всех таких чисел c из $(a, b]$, что $f(c)>f(a)$. Докажем, что $b \in A$.

Пусть d – точная верхняя грань A. Докажем, что $d=b$. Допустим противное. Так как d принадлежит заданному промежутку, то существует содержащий это число интервал покрывающего набора, в котором функция возрастает. Для всякого числа $e>d$ из этого интервала имеет место $f(e)>f(d)$, а значит, $f(e)>f(a)$, а потому d не является точной верхней гранью A, вопреки допущению.

Следующая теорема зримо выражает компактность естественной топологии на отрезке.

Теорема 4. (лемма Бореля). У всякого набора интервалов, образующих покрытие числового отрезка, имеется конечный поднабор, покрывающий этот отрезок.

Пусть Σ – интервальное покрытие отрезка $[a, b]$. Число x_0 этого отрезка будем называть хорошим, если отрезок $[a, x_0]$ покрывается каким-нибудь конечным набором интервалов из Σ. Обозначим через P совокупность всех хороших точек. Доказываемое утверждение равносильно утверждению, что P=[a, b], или, что то же, утверждению, что b – хорошая точка.

Так как множество P ограничено справа, то, согласно лемме 1, оно имеет наименьшую верхнюю грань c. Это число принадлежит P. В самом деле, пусть U – какая-нибудь окрестность числа c, принадлежащая Σ. Согласно лемме 1.2 в U имеются числа из P. Пусть d – какое-нибудь из них, Σ_1 – конечный набор интервалов из Σ, покрывающий отрезок [a, d]. Присоединив к нему U, получим конечный набор интервалов из Σ, покрывающий отрезок [a, c]. А значит, c принадлежит P.

c есть b. В противном случае всякое число из U, большее c, принадлежало бы P, что противоречило бы тому, что c – верхняя грань P.

Задача 1.5. Доказать, что теорема 4 равносильна теореме 1.

Теоремы 1–4 являются разными формами представления компактности естественной топологии на числовом отрезке. Использование не одной из этих форм, а разных несет возможность упрощения и стандартизации доказательств многих теорем математического анализа.

Задача 1.6. Доказать, что всякая ограниченная монотонная последовательность имеет предел.

Задача 1.7. Пусть на промежутке I с правым /левым концом x_0 функция f является ограниченной и неубывающей. Тогда в точке x_0 она имеет предел справа /слева, равный наименьшей верхней гранью ее значений на I.

Задача 1.7а. Пусть на на неограниченном справа промежутке I функция f является ограниченной и неубывающей. Тогда существует $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, равный наименьшей верхней гранью значений f на I.

Теорема Вейерштрасса

Насколько хорошей моделью непрерывности на промежутке (непрерывности в обыденном понимании) является строгое понятие непрерывности на промежутке? В частности, действительно ли достаточно непрерывности (в смысле строгого определения) в каждой точке промежутка для того, чтобы функция принимала на нем свои значения сплошь? Иначе говоря, верно ли, что если функция f непрерывна на промежутке I, то $E_I(f)$ – промежуток? (Здесь и далее $E_I(f)$ обозначает множество всех значений функции f на промежутке I).

Лемма 2.1. Пусть функция f непрерывна на промежутке I. Тогда $E_I(f)$ – промежуток.

Пусть a и b>a – какие-нибудь числа из I. Допустим для определенности, что f(a)<f(b). Пусть μ – какое-нибудь число из интервала (f(a), f(b)). Докажем, что в (a,b) существует точка c такая, что f(c)=μ. Тем самым, лемма будет доказана.

Число x из [a, b] будем называть хорошим, если f(t)<μ для всякого числа t из [a, x]. Согласно лемме 1.1 существует наименьшая верхняя грань c множества M хороших чисел. Если бы было f(c)>μ, то, в силу непрерывности f в c, существовала бы такая окрестность точки c, что для любой ее точки x было f(x)>μ. Но это противоречило бы тому, что c – наименьшая верхняя грань M. Если бы было f(c)<μ, то существовала бы такая окрестность точки c, что для любой ее точки x было f(x)<μ. Но и это противоречило бы тому, что c – наименьшая верхняя грань M. Таким образом, $f(c)=\mu$.

Лемма 2.2. Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на нем.

Пусть функция f непрерывна на некотором отрезке. Тогда для каждой точки этого отрезка существует ее окрестность, в которой f ограничена. Значит, существует покрытие отрезка такими окрестностями. Согласно теореме 4 у этого покрытия существует конечное подпокрытие. Таким образом, отрезок покрываем конечным набором интервалов, в каждом из которых функция ограничена. Пусть $U_1,\ldots U_n$ – интервалы, покрывающие отрезок, и пусть $a_i<f(x)<b_i$ для всякой точки x интервала U_i $(i=1,\ldots, n)$. Обозначим через a наименьшее из чисел a_i, а через b – наибольшее из чисел b_i. Ясно, что $a<f(x)<b$ для всякой точки x отрезка. Значит, f ограничена на рассматриваемом отрезке.

В действительности нами доказано более общее предложение:

Если в каждой точке отрезка функция имеет предел, то она ограничена на этом отрезке.

Задача 2.1. Доказать, что если в каждой внутренней точке отрезка функция имеет оба односторонних предела, а в левом его конце – предел справа и в правом – предел слева, то она ограничена на этом отрезке.

Теорема 5. Пусть функция f непрерывна на отрезке I. Тогда $E_I(f)$ – отрезок.

Согласно леммам 2.1 и 2.2 $E_I(f)$ – ограниченный промежуток. Отсюда и из леммы 1.1 следует, что существует его наименьшая верхняя грань m. Докажем, что она принадлежит $E_I(f)$. Допустим противное, то есть что $f(x)<m$ для всякой точки x из I. Тогда для всякой точки x_0 из I найдутся такая ее окрестность $U(x_0)$ и такое число $\alpha(x_0)<m$, что $f(x)<\alpha(x_0)$ для всякой точки x из $J(x_0)$. Окрестности $U(x_0)$ образуют покрытие отрезка I. Пусть $U(x_1),\ldots, U(x_n)$ – конечное его подпокрытие и β – наибольшее из чисел $\alpha(x_1),\ldots, \alpha(x_n)$. Тогда $f(x)<\beta$ для всякой точки x из I. А так как $\beta<m$, то m не является наименьшей верхней гранью $E_I(f)$. Пришли к противоречию.

Аналогично доказывается, что наибольшая нижняя грань $E_I(f)$ принадлежит $E_I(f)$.

А вот доказательство принадлежности m множеству $E_I(f)$, использующее другую форму представления полноты **R**. Согласно лемме 1.2 среди значений f на [a, b] существуют как угодно близкие к m. Кусок отрезка [a, b] будем называть хорошим, если в нем функция принимает значения как угодно близкие к m. Разобъем [a, b] на две половины. Какая-нибудь из них с присоединенной к ней точкой разбиения является хорошим отрезком. Этот отрезок разобьем подобным образом на две половины и выберем из них хороший отрезок. Продолжая этот процесс, получим последовательность хороших вложенных отрезков (см лемму 1.2), сжимающуюся в точку c. В любой окрестности этой точки имеются точки, в которых f принимает значения как угодно близкие к m. Отсюда и из непрерывности f в точке c следует $f(c)=m$.

Аналогично может быть доказано, что наибольшая нижняя грань значений f на [a, b] принадлежит $E_I(f)$.

Задача 2.2. Доказать, что теорема 5 равносильна теореме 1.

Задача 2.3. Найти функцию, непрерывную в интервале (на полуинтервале), такую, что множество ее значений на нем не есть интервал (полуинтервал).

Теорема 6. Доказать, что между любыми двумя нулями непрерывной функции имеется хотя бы одна точка экстремума.

Пусть функция f непрерывна на промежутке I, a и b>a – ее нули, лежащие в I. Если f постоянна на [a, b], то всякая внутренняя точка этого отрезка является точкой экстремума. Пусть в какой-нибудь точке отрезка [a, b] функция принимает, скажем, положительное значение. Из теоремы 5 следует, что в некоторой точке x_0 этого отрезка она принимает наибольшее значение. Это значение положительное. А так как f(a)=f(b)=0, то x_0 –внутренняя точка [a, b] и, значит, точка экстремума.

Задача 2.4. Доказать, что теорема 6 равносильна теореме 1.

Задача 2.5. Пусть I – промежуток, являющийся областью определения непрерывной возрастающей или убывающей функции f. Доказать, что если I – интервал (полуинтервал, отрезок), то $E_I(f)$ – интервал (полуинтервал, отрезок).

Задача 2.6. Пусть функция f. является невозрастающей или неубывающей на промежутке I. Доказать, что f непрерывна на I тогда и только тогда, когда E_I (f) – промежуток.

Задача 2.7. Верно ли, что всякая функция f, определенная на отрезке I и такая, что для всякого промежутка J, входящего в I, $E_J(f)$ – промежуток, непрерывна на I? I

Задача 2.8. Пусть функции f и g непрерывны на промежутке I и принимают на нем одно и то же наименьшее или наибольшее значение. Доказать, что в некоторой точке из I они принимают одно и то же значение.

Использованием решения задачи 1.7 легко решается

Задача 2.9. Пусть функция f, непрерывная в точке x_0, в некоторой ее окрестности U слева от x_0 является неубывающей, а справа – невозрастающей. Тогда $f(x_0)$ – наибольшее значение f в U, и потому x_0 – точка максимума f.

Задача 2.10. Доказать, что если множество периодов всюду определенной непрерывной функции имеет предельную точку, то эта функция постоянная.

Равномерная непрерывность

Напомним, что непрерывность функции f в точке x_0 означает, что для всякого числа $\varepsilon>0$ существует такая окрестность точки x_0, что $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ для всякой точки x из этой окрестности. Среди таких окрестностей существует наибольшая. Будем ее обозначать через $U_\varepsilon(x_0)$.

Задача 3.1. Пусть f непрерывна в точке $\mathbf{x_0}$. Доказать, что для всяких точек t и u из $U_\varepsilon(x_0)$ имеет место $|f(u)-f(t)|<2\varepsilon$.

$$|f(u)-f(t)|=|(f(u)-f(x_0))+(f(x_0)-f(t))|\le|f(u)-f(x_0)|+|f(x_0)-f(t)|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.$$

Задача 3.2. Пусть функция f, определенная на некотором промежутке, непрерывна в точках x_1 и x_2 и $U_\varepsilon(x_1)$ и $U_\varepsilon(x_2)$ – пересекающиеся окрестности. Доказать, что для всяких точек t и u из $U_\varepsilon(x_1)\cup U_\varepsilon(x_2)$ имеет место $|f(u)-f(t)|<4\varepsilon$.

Пусть v – какая-нибудь точка из общей части $U_\varepsilon(x_1)$ и $U_\varepsilon(x_2)$. Тогда

$$|f(u)-f(t)|=|(f(u)-f(v))+(f(v)-f(t))|\le|f(u)-f(v)|+|f(v)-f(t)|.$$

Точки u и v обе принадлежат $U_\varepsilon(x_1)$ или $U_\varepsilon(x_2)$. А значит, $|f(u)-f(v)|<2\varepsilon$ (см. задачу 3.1). Аналогичное верно для точек t и v. А значит, $|f(t)-f(v)|<2\varepsilon$. Отсюда $|f(u)-f(t)|<2\varepsilon+2\varepsilon=4\varepsilon$.

Говорят, что функция f, определенная на промежутке I, *равномерно непрерывна* на нем, если для всякого $\varepsilon>0$ существует такое число δ, что для всякой точки x из I длина $U_\varepsilon(x)$ не меньше δ.

Иначе говоря, функция f, определенная на промежутке I, равномерно непрерывна на нем, если для всякого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что для всяких точек t и u из I имеет место $|u-t|<\delta \Rightarrow |f(u)-f(t)|<\varepsilon$.

Очевидно, что функция, равномерно непрерывная на промежутке, непрерывна на нем. Очевидно и то, что функция, равномерно непрерывная на каком-нибудь промежутке, равномерно непрерывна на всяком промежутке, являющемся его частью.

Функция $y=x^2$ непрерывна на всей числовой прямой, но не является на ней равномерно непрерывной

– А верно ли, что функция, непрерывная в каждой точке конечного промежутка, равномерно непрерывна на нем?

Задача 3.3. Доказать, что функция y=1/x не является равномерно непрерывной на интервале (0, 1).

– А верно ли, что функция, непрерывная в каждой точке конечного промежутка и ограниченная на нем, равномерно непрерывна на нем?

Задача 3.4*. Построить функцию, непрерывную и ограниченную на конечном интервале и не являющуюся равномерно непрерывной на нем.

Теорема 7. Функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на нем.

Действительно, пусть функция f непрерывна на отрезке I. Зададимся каким-нибудь положительным числом ε_0. Докажем, что существует такое $\delta>0$, что для всяких точек t и u из I имеет место $|u-t|<\delta \Rightarrow |f(u)-f(t)|<\varepsilon_0$.

Пусть $\varepsilon=\varepsilon_0/4$. Каждой точке x_0 из I соотнесем $U_\varepsilon(x_0)$. Все эти окрестности образуют конечное подпокрытие I. Пусть Σ – такое подпокрытие. Обозначим через δ наименьшую из длин интервалов из Σ.

Пусть t и u – такие точки из I, что $|u-t|<\delta$. Докажем, что $|f(u)-f(t)|<\varepsilon\cdot$ В самом деле, t и u принадлежат либо какому-нибудь интервалу из Σ, либо каким-нибудь двум пересекающимся интервалам из Σ и потому $|f(u)-f(t)|<4\varepsilon$ (см. задачу 3.2), или $|f(u)-f(t)|<\varepsilon_0$.

Будем говорить, что функция f, определенная на промежутке I, *строго равномерно непрерывна* на нем, если существует такое число $\mu>0$, что для всякого $\varepsilon>0$ и всякой точки x из I длина $U_\varepsilon(x)$ не меньше $\mu\cdot\varepsilon$.

Очевидно, что функция, строго равномерно непрерывная на каком-нибудь промежутке, равномерно непрерывна на нем. Очевидно также, что функция, строго равномерно непрерывная на каком-нибудь промежутке, строго равномерно непрерывна на всяком промежутке, являющемся его частью.

Задача 3.5. Доказать, что всякая линейная функция строго равномерно непрерывна на всем множестве действительных чисел.

Задача 3.6. Доказать, что всякая функция $y=x^\alpha$, где $\alpha<1$, строго равномерно непрерывна на промежутке $[1,+\infty)$.

Теорема 8. Если функция f дифференцируема на промежутке I и ее производная ограничена на нем, то f строго равномерно непрерывна на I.

Пусть $|f'(x)|<\lambda$ для всякой точки x из I. Согласно теореме Лагранжа, для всяких точек x_0 и $x_0+\Delta x$ из I имеет место $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(c)\Delta x$, или

Δy=f '(c)Δx, где c – некоторая точка, лежащая между x_0 и $x_0+\Delta x$. Отсюда $|\Delta y|=|f'(c)|\cdot|\Delta x|\le \lambda|\Delta x|$. Отсюда следует, что условие $|\Delta y|<\varepsilon$ будет выполняться, если будет выполняться условие $\lambda\ |\Delta x|<\varepsilon$, то есть если $|\Delta x|<\varepsilon/\lambda$. Таким образом, f – такая функция, что для всякого $\varepsilon>0$ и всякой точки x из I длина $U_\varepsilon(x)$ не меньше $\mu=\varepsilon/\lambda$. Следовательно, f строго равномерно непрерывна на I.

Задача 3.7. Найти значение $\sqrt[3]{1{,}03}$ с погрешностью, не превосходящей 0,01. Рассмотрим функцию f(x)=$\sqrt[3]{x}$. Так как $|f'(x)|<1/3$ на промежутке $[1, +\infty)$, то f строго равномерно непрерывна на нем. При этом для всякого $\varepsilon>0$ и всяких точек x_1 и x_2 из этого промежутка из $|x_1-x_2|<3\varepsilon$ следует $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

Пусть $\varepsilon=0{,}01$, $x_1=1$, $x_2=1{,}03$. Так как $|x_1-x_2|\le 3\varepsilon=0{,}03$, то $|\sqrt[3]{1{,}03}-\sqrt[3]{1}|\le 0{,}01$. Отсюда $\sqrt[3]{1{,}03}\approx 1+0{,}01=1{,}01$ с погрешностью, не превосходящей 0,01.

Признаки монотонности

Приводятся прямые доказательства признаков монотонности функций и строгое, но от этого не менее доступное для школьников доказательство теоремы Лагранжа о конечных приращениях.

Как и выше, говоря о промежутках (интервалах, отрезках), будем иметь в виду числовые промежутки (интервалы, отрезки).

Лемма 4.1. Пусть x_0 – внутренняя точка области определения функции f и $f'(x_0)>0$. Тогда $x<x_0\to f(x)<f(x_0)$ и $x>x_0\to f(x)>f(x_0)$ для всякой точки x из некоторой окрестности точки x_0.

Теорема 9. Пусть $f'(x)>0$ для всякой точки x промежутка I. Тогда f возрастает в I.

Пусть a и b>a – числа из I. Докажем, что f(b)>f(a). Число x промежутка (a, b] назовем хорошим, если f(x)>f(a). Из леммы 4.1 следует, что хорошие числа существуют. Пусть J –множество всех хороших чисел и d – наименьшая верхняя грань J. Тогда d=b. Допустим противное. Тогда, согласно лемме 4.1, в J существуют такие числа e>d, что f(e)>f(d). Но это противоречит тому, что d – наименьшая верхняя грань J.

Теорема 9 равносильна следующей: Пусть $f'(x)<0$ для всякой точки x промежутка I. Тогда f убывает в этом интервале. Действительно, производная функции y= –f(x) положительна в I. По теореме 9, эта функция возрастает в I. Но тогда функция f убывает в этом интервале. Аналогично из доказанного выводится теорема 9.

Теорема 10. Пусть $f'(x)\ge 0$ для всякой точки x интервала I. Тогда функция f является неубывающей в этом интервале.

Допустим противное, то есть что для некоторых точек c и d>c из I имеет место f(c)>f(d). Пусть k- какое-нибудь положительное число, для которого k(d-c)<f(c)-f(d). Рассмотрим функцию g(x)=f(x)+kx. Так как $g'(x)>0$ в I, то, согласно теореме 8, эта функция возрастающая в I, то есть такая, что $b>a\to g(b)>g(a)$ для всяких a и b из I. В частности, $d>c\to g(d)>g(c)$. С другой стороны, из предположения, что f(c)>f(d), следует

$k(d-c)<f(c)-f(d)$ (в силу выбора k),или $f(c)+kc>f(d)+kd$, то есть $g(c)>g(d)$. Пришли к противоречию.

Теорема 10 равносильна следующей: Пусть $f'(x)\le 0$ для всякой точки x интервала I. Тогда функция f является невозрастающей в этом интервале.

Из теоремы 10 следует

Теорема 11. Пусть $f'(x)\equiv 0$ в интервале I. Тогда f постоянна в I.

Напомним: функция F называется первообразной для функции f (в интервале I), если $F'(x)\equiv f(x)$ в I.

Из теоремы 10 и решения задачи 2.9 непосредственно следует

Теорема 12. Пусть функция f, непрерывная в точке x_0 и дифференцируемая в ее выколотой окрестности U, такова, что в U слева от x_0 $f'(x)\le 0$/$f'(x)\ge 0$, а справа $f'(x)\ge 0$/$f'(x)\le 0$. Тогда $f(x_0)$ – точка минимума/ максимума f.

Задача 4.1. Используя теорему 11, доказать, что если функция F – первообразная для функции f (в интервале I), то всякая первообразная для f (в I) есть F(x)+C, где C – постоянная.

Теорема 13. (теорема Ролля). Пусть функция f непрерывна на отрезке [a, b], дифференцируема внутри его и f(a)=f(b). Тогда внутри этого отрезка существует точка, в которой производная равна 0.

Эта теорема является прямым следствием теоремы 6.

Задача 4.2. Доказать, что всякая функция f, непрерывная на отрезке [a, b] и дифференцируемая внутри его, представима как сумма линейной функции и функции F, удовлетворяющей на этом отрезке условиям теоремы 13.

Иначе говоря, требуется доказать, что существуют такие числа Q и m, что функция F(x)=f(x)+ Qx+m удовлетворяет на отрезке [a, b] условиям теоремы 13.

Такие Q и m легко находятся из условий f(a)+Qa+m=0 и f(b)+Qb+m=0. Они таковы: $Q=-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ и m= –Qa–f(a). При этих значениях Q и m функция F(x)=f(x)–Qx+Qa–f(a), или F(x)=f(x)–f(a)–Q(x–a), удовлетворяет на [a, b] условиям теоремы 12.

В силу теоремы 13 внутри [a, b] существует такая точка c, что $F'(c)=0$, или $f'(c)-Q=0$, или $f'(c)=Q$. Последнее равенство представимо в форме

$$f(b)-f(a)=f'(c)\,(b-a), \qquad (*)$$

раскрывающей возможность его применения для исследования поведения функций.

Вот как доказывается, например, теорема 9 использованием этого равенства. Пусть $f'(x)>0$ на интервале I. Тогда, по доказанному, между всякими точками a и b из I существует точка c, удовлетворяющая равенству (*). И так как $f'(c)>0$, то знак f(b)–f(a) совпадает со знаком b–a. А это значит, что функция f возрастает в I.

Уже этот пример показывает целесообразность выделения соотношения (*) и фиксации найденного выше условия его выполнимости:

Теорема Лагранжа. Пусть функция f непрерывна на отрезке [a, b] и дифференцируема внутри его. Тогда внутри этого отрезка имеется такая точка c, что $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

– Процедура доказательства теоремы 9, использующая теорему Лагранжа, весьма проста. А главное – само соотношение (*) делает доказываемый факт почти самоочевидным.

– В действительности доказательство теоремы 9, использующее теорему Лагранжа, намного сложнее. Ведь оно опирается на теорему _Ролля, доказательство которой использует теорему 5, а значит, не столь уж короткую цепь рассуждений, ведущую к доказательству этой теоремы, тогда как приведенное доказательство теоремы 9 прямым образом опирается на полноту R и не использует не только свойства непрерывных на отрезке функций, но и само понятие непрерывности.

– И тем не менее доказательство теоремы 9, использующее теорему Лагранжа, воспринимается легче. Выяснение того, почему, за счет чего это так, может открыть немало поучительного в методах обучения.

В частности, важно принять во внимание то, что уровень формальной сложности цепи рассуждений, приводящей к доказательству рассматриваемого предложения, и уровень сложности ее понимания – это не одно и то же. Более того, это совершенно разные вещи. Так, если цепь рассуждений хорошо структурирована, если ее структура соответствует внутренней логике процесса движения к пониманию, его стратегическим линиям, то это создает возможность легче осваивать целостную структуру такой цепи и способствует возрастанию эффективности работы механизмов понимания.

Задача 4.3. Доказать, что если в интервале $(a,+\infty)$ $f''(x)>0$ и $f'(x)>0$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Пусть в интервале $(a,+\infty)$ $f''(x)>0$ и $f'(x)>0$. В нем функция $y=f'(x)$ возрастает и принимает положительные значения. Пусть натуральное число m входит в $(a,+\infty)$. Тогда

$$f(m+k)-f(m)=(f(m+k)-f(m-(k-1))+(f(m-(k-1))-f(m-(k-2))+\ldots+(f(m+1)-f(m)).$$

Согласно теореме Лагранжа $f(m+1)-f(m)=f'(c_1)$, где c_1 – некоторая точка из $(m, m+1)$, $f(m+2)-f(m+1)=f'(c_2)$, где c_2 – некоторая точка из $(m+1, m+2)$, и т. д. Таким образом, $f(m+k)-f(m)=c_1+ c_2+\ldots+ c_k$. А так как $c_1<c_2+<\ldots<c_k$, то $f(m+k)-f(m)>k\, c_1$. Отсюда $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Задача 4.4. Доказать, что если в интервале $(a,+\infty)$ $f^{(n+1)}(x)>0$ и $f^{(n)}(x)>0$ для какого-нибудь n, то $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Полна ли числовая прямая?

Изоморфны ли числовая прямая и **R** как упорядоченные множества? Показывается, что постулирование аналога теоремы 1 для прямой несет положительный ответ на этот вопрос.

– Мы постоянно сбиваемся. Мы говорим «точка», а имеем в виду число, представляемое этой точкой на числовой прямой. Мы говорим «число», а имеем в виду точку на числовой прямой, представляющую это число. Мы говорим об окрестности точки, а имеем в виду числовой интервал, содержащий число, представляемое этой точкой. И т. д.

– Но если всякое число представимо подходящей точкой на числовой прямой и всякая точка числовой прямой представляет некоторое число, причем разные точки представляют разные числа, то такая терминологическая подмена не приводит к недоразумениям, поскольку в этом случае всякая точка и представляющее ее число взаимоопределимы, а значит, всякий промежуток числовой прямой взаимоопределим с промежутком на числовой прямой, состоящим из точек, представляющих эти числа.

– Но действительно ли всякое число представляет определенную точку на числовой прямой и всякая точка на числовой прямой представима некоторым числом?

– Более конкретно этот вопрос должен быть сформулирован так: из каких (геометрических) положений о числовой прямой (рассматриваемой как упорядоченное множество точек) мы явно или неявно исходим? И действительно ли эти положения влекут, что имеющееся нами в виду соответствие между числами и точками прямой таково, что всякое число представимо определенной точкой числовой прямой и что всякая точка числовой прямой представляет определенное число?

При этом, говоря о числовой прямой, мы имеем в виду прямую с заданными на ней направлением, точке на ней, представляющей число 0, и точке, представляющей число 1. Впрочем, уже задание этих двух точек есть и задание направления на прямой, а именно направления от первой из этих точек ко второй.

– Иначе говоря, действительно ли в силу таких положений числовая прямая становится образом и подобием числового множества R, а R – образом и подобием числовой прямой?

– Конечно, мы должны исходить из следующего *положения* 1:

Какой бы отрезок на числовой прямой мы ни взяли, от всякой ее точки можно и влево, и вправо отложить на ней равный ему отрезок.

Из этого положения вытекает следующее: у числовой прямой (как и у всякой прямой) нет ни начала, ни конца, то есть ни самой левой, ни самой правой точки.

– Принципиальная возможность измерения с любой точностью длины всякого отрезка и ее выражения конечной или бесконечной десятичной дробью не может не предполагать следования *положению* 2:

На любом отрезке прямой существуют точки, разбивающие его на десять равных отрезков.

Из положения 2 следует, что между любыми двумя точками на прямой имеется бесконечно много ее точек.

Но прежде всего, мы должны иметь в виду следующее *положение* 3, подобное теореме 1 и выражающее наши представления о прямой как о сплошном множестве точек:

У прямой нет «щелей». То есть на какие бы два куска прямую ни разбили, либо у левого куска будет самая правая точка, либо у правого – самая левая.

Правой гранью множества M точек прямой будем называть всякую такую ее точку, которая расположена не левее любой точки из M. Множество M называется ограниченным справа, если имеются его правые грани. Левой гранью M будем называть всякую такую ее точку, которая расположена не правее любой точки из M. Множество M называется ограниченным слева, если имеются его левые грани.

Точной правой гранью множества точек прямой будем называть самую левую из его правых граней, а его точной левой гранью – самую правую из его левых граней.

Промежутком на прямой будем называть всякое (непустое) множество ее точек, которое вместе со всякими двумя его точками содержит и все заключенные между ними точки. Интервалом на прямой называют всякий ее промежуток, не содержащий ни самой левой, ни самой правой точки. Для всякой точки на прямой ее окрестностями называют содержащие ее интервалы.

Нетрудно убедиться в том, что если точка есть точная правая или точная левая грань множества точек M на прямой, то в любой его окрестности имеются точки из M.

Из положения 3 вытекает аналог леммы 1.1:

Ограниченное справа (слева) множество точек прямой имеет точную правую (точную левую) грань.

На базе положений 1–3 можно доказать, что всякое число представимо подходящей точкой на числовой прямой, то есть что для всякого числа r принципиально осуществима процедура отыскания такой точки M, что OM – отрезок длины r.

Ограничимся рассмотрением положительных чисел, а значит, и точек правой, или положительной, части числовой прямой. Подтверждение нашей гипотезы для положительных чисел будет ее подтверждением и для чисел отрицательных.

Для всякого числа r условимся обозначать представляемую им точку числовой прямой (существующую или, возможно, лишь мыслимую) знаком M_r.

Пусть m,abc… – какое-нибудь число. Рассмотрим множество его конечных десятичных приближений

$$D=\{m;\ m,a;\ m,ab;\ m,abc;\ldots\}$$

Каждое число множества D есть представимое число. Так, откладывая вправо от точки O m отрезков, равных OM_1, получим отрезок OM_m. Таким образом, число m представимое (как и всякое натуральное число).

Разобъем отрезок OM_1 на десять равных отрезков OS, ST, TU,… . Точка S есть $M_{0,1}$. Откладывая вправо от точки O a раз отрезок, равный OS, получим отрезок $OM_{0,a}$. Откладывая от точки M_m вправо отрезок, равный $OM_{0,a}$, получим отрезок $OM_{m,a}$. Таким образом, число m,a представимо.

Разобъем отрезок $OM_{0,1}$ на десять конруэнтных отрезков: OW, WZ,… . Точка W есть $M_{0,01}$. Откладывая (вправо) от точки O b раз отрезок, конруэнтный OW, получим отрезок $OM_{0,0b}$. Откладывая вправо от точки $M_{m,a}$ отрезок, конруэнтный $OM_{0,0b}$, получим отрезок $OM_{m,ab}$. Таким образом, число m,ab представимо. И т. д.

Так как множество D ограничено справа, то оно имеет точную правую грань. Она и представляет число m,abc… . Иначе говоря, она есть $M_{m,abc\ldots}$.

Итак, всякое число представимо подходящей точкой на числовой прямой. Нетрудно доказать и то, что $M_r \neq M_s$ равносильно $s \neq r$ для всяких чисел r и s.

Теперь попытаемся на базе положений 1–3 доказать, что всякая точка на числовой прямой представляет некоторое число. Ограничимся рассмотрением точек из правой, или положительной, части числовой прямой.

Подтверждение нашей гипотезы для таких точек будет ее подтверждением для всех точек числовой прямой.

Пусть P – какая-нибудь точка из правой части числовой прямой. Если OP получается откладыванием вправо от точки O m отрезков, равных OM_1, то длина OP равна m, а значит, $P=M_m$.

Если P расположена правее M_m и левее M_{m+1}, то длина OP есть сумма m и длины отрезка M_mP, равного некоторому отрезку OQ, такому, что Q расположена правее O и левее M_1. Тогда найдется число k, равное какому-то из чисел 0, 1, 2, , …, 9 и такое, что длина OQ принадлежит числовому промежутку [k/10, (k+1)/10), значит, длина OP принадлежит числовому промежутку [m,k; m,k+0,1). Продолжая этот процесс, будем получать такие числа l, n, p,… из множества {0, 1, 2,…, 9}, что длина OP принадлежит числовым промежуткам [m,kl; m,kl+0,01), [m,kln; m,kln+0,001),… . Таким образом, длина отрезка OP выражается числом m,klnp…, являющимся точной верхней гранью последовательности ее десятичных приближений, то есть $P=M_{m,klnp\ldots}$. Таким образом, всякая точка на числовой прямой представляет некоторое число.

Заметим, однако, что приведенное доказательство этого предложения основывается на предположении, что для всякой точки P из правой части числовой прямой существует такое натуральное число m, что P принадлежит отрезку $[M_m, M_{m+1}]$. Таким образом, оно существенно использует следующее положение, которое согласуется с нашими привычными представлениями о числовой прямой:

На числовой прямой нет бесконечно далеких точек, то есть точек, расположенных справа от всех натуральных точек.

Но и это еще не все! Где гарантия, что строящиеся в рассмотренном доказательстве последовательности десятичных приближений

m; m,k; m,kl; m,kln; m,klnp;…(*)

не совпадут для разных точек числовой прямой? Где гарантия, что не существует точка P, отличная от точки O и бесконечно близкая к ней, то есть расположенная справа от нее и слева от точек M_r , где r – положительные рациональные числа? Если существует хоть одна такая точка, то таких точек бесконечно много. Последовательность десятичных приближений (*) будет одна и та же для всех этих точек: 0; 0,0; 0,00; 0,000;… . При наличии таких точек будут существовать разные точки, представляющие одно и то же число.

Таким образом, необходимо следующее *положение* 4:

На числовой прямой нет ни бесконечно больших, ни бесконечно малых отрезков.

Легко видеть, что из положений 1–4 следует аксиома Архимеда, утверждающая, что для любых двух отрезков α и β любой из них можно отложить такое конечное число раз, что полученный отрезок покроет другой.

Нетрудно доказать, что предложение 4 равносильно аксиоме Архимеда.

Итак, положений 1–4 согласуются с нашими привычными представлениями о числовой прямой и обеспечивают такие ее свойства, которые оправдывают термин «числовая прямая».

То, что не существует бесконечно далеких точек, следует из положений 1–3. Допустим противное. Тогда множество N всех натуральных точек, то есть точек, представляющих натуральные числа, является ограниченным. А значит, существует его точная правая грань P. Она не принадлежит **N.** И тогда всякая ее окрестность содержит бесконечно много натуральных точек. Но окрестности P длины 1/2 содержат не более одной натуральной точки. Пришли к противоречию.

Аналогичным образом, исходя из положений 1–3, можно доказать, что не существует бесконечно малых отрезков. В самом деле, допустим, что такие отрезки существуют. Тогда существуют точки, расположенные справа от точки O и слева от всех точек, представляющих положительные числа (из R). Значит, существует отличная от O точная левая грань P множества всех точек, представляющих положительные числа из R. Так как нет наименьшего положительного числа из R, то P – точка, бесконечно близкая к O. Отложим от нее вправо отрезок, конгруэнтный отрезку OP. Пусть Q – правый его конец. Так как всякая окрестность точки P содержит точки, представляющие числа из R, то отрезок OQ не является бесконечно малым. Но тогда и отрезок OP не является бесконечно малым. Пришли к противоречию.

Итак, положение 3, выражающее полноту, или сплошность, прямой, вместе с положениями 1 и 2 влечет существование взаимно однозначного соответствия между точками числовой прямой и действительными числами, такого, что $s>r$ равносильно тому, что точка M_s расположена «правее» точки M_r. В частности, оно влечет аксиому Архимеда. Заметим, что эти положения выводимы из идущей от Гильберта аксиоматики евклидовой геометрии.

Библиографический список

1. *Когаловский С. Р.* Поиски метода и методы поиска. Шуя: изд-во ШГПУ, 2006. 368 с.

2. *Когаловский С. Р.* Онтогенетический подход к обучению школьников математике. Иваново: Иван. гос. ун-т, 2018. 315 с.

3. Аудио-запись заседания семинара «Математика и информатика в средней и высшей школе» от 11 мая 2023. http://school-math.org/seminar/

4. *Семенов П. В.* Исследование функций, минующее классические теоремы дифференциального исчисления // Математика и математическое образование: проблемы, технологии, перспективы: материалы 42 Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов. Смоленск: изд. СмолГУ, 2023. 430 с.

Информация об авторе / Information about the author

Когаловский Сергей Рувимович – кандидат физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математики, информатики и методики обучения, Шуйский филиал Ивановского государственного университета, г. Шуя, Россия, askogal@yandex.ru

Kogalovsky Sergey Ruvimovich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Mathematics, Computer Science and Teaching Methods, Shuya Branch of Ivanovo State University, Shuya, Russia, askogal@yandex.ru

УДК 001.5

Т. В. Карасёва, С. Ю. Толстова, Е. Е. Соколов, Е. Ю. Егорова

ОПЫТ КОМПЛЕКСНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ РАЗВИТИЯ РЕСУРСОВ ЧЕЛОВЕКА

Статья посвящена научному направлению Ивановского государственного университета «Комплексные исследования развития физических, социальных и психологических ресурсов человека в системе образования». Изложены основные подходы и принципы комплексных исследований развития ресурсов человека в системе образования. Описаны этапы развития данного направления исследований в условиях межвузовского взаимодействия. Представлены основные результаты исследований и опыт их внедрения в образовательный процесс вуза.

Ключевые слова: исследования человека, комплексный подход, высшее образование.

T. V. Karaseva, S. Yu. Tolstova, E. E. Sokolov, E. Yu. Egorova

EXPERIENCE OF COMPLEX RESEARCH OF HUMAN RESOURCE DEVELOPMENT

The article is devoted to the scientific direction of Ivanovo State University "Comprehensive studies of the development of physical, social and psychological human resources in the education system". The main approaches and principles of comprehensive research on the development of human resources in the education system are outlined. The stages of development of this research direction in the conditions of interuniversity interaction are described. The main research results and the experience of their implementation in the educational process of the university are presented.

Key words: human research, integrated approach, higher education.

Задача современного высшего образования – подготовка всесторонне развитых, конкурентоспособных специалистов для рынка труда. Профессионализм деятельности должен сочетаться с профессионализмом личности выпускника классического университета, это требует системы обучения, основанной на комплексном, научно обоснованном подходе к развитию ресурсов человека в системе образования. В связи с этим, одним из научных направлений Ивановского государственного университета являются «Комплексные исследования развития физических, социальных и психологических ресурсов человека в системе образования». Данное направление входит в перечень тем Ивановского научного центра РАО и включает исследования в области психологии, педагогики, социальной медицины, физической культуры.

Формирование комплексных исследований развития ресурсов человека в системе образования, как научного направления, имеет многолетнюю историю. Главным организатором и руководителем научного поиска долгие годы был доктор медицинских наук, доктор психологических наук, профессор Сергей Николаевич Толстов (1965–2019). Обладая двойной научной квалификацией, Сергей Николаевич сумел на междисциплинарном уровне объединить исследования своих коллег и учеников, что нашло отражение в защите 32 диссертаций по 10 научным специальностям в сфере медицинских, педагогических, психологических наук. Это позволило в полной мере реализовать комплексный подход к изучению развития ресурсов человека в системе образования. Профессор С. Н. Толстов был талантливым организатором науки, благодаря его усилиям были установлено межвузовское взаимодействие между Ивановским государственным медицинским институтом, Шуйским государственным педагогическим университетом, Ивановским государственным университетом, Российским государственным социальным университетом, Российской академией государственной службы при Президенте РФ. Большую роль в развитии комплексных исследований сыграло сотрудничество с РАМН, РАО, РАСН.

Проблема развития физических, социальных и психологических ресурсов человека в системе образования изучалась нами по трём основным векторам:

– гигиеническое обучение и воспитание;

– развитие готовности субъектов образования к здоровому образу жизни;

– формирование здоровьесберегающей и безопасной образовательной среды.

Ключевые понятия, разработке которых были посвящены наши исследования, стали категории готовности субъектов образования к здоровому образу жизни. Готовность обучающихся к реализации ЗОЖ в контексте личностного развития, мы рассматриваем как интегральное личностное образование, определяющее здоровьесберегающее поведение и формирующееся в специально созданных условиях образовательной среды. Готовность педагогов, для нас, является двухкомпонентным понятием, объединяющим личностные и профессиональные составляющие, позволяющие реализовывать здоровьесберегающие образовательные технологии.

Сравнительный анализ уровней готовности педагогов к здоровьесберегающему образованию, иллюстрирует серьёзные проблемы в данной области. Среди преподавателей колледжей и вузов низкая готовность встречается, соответственно в 50 %, и 57,4 % случаев. Доля учителей с низким уровнем готовности составляет 43,1 %, а среди студентов – будущих педагогов – от 46,9 % до 60 %. Самый благоприятный показатель выявлен у воспитателей детских образовательных учреждений, среди которых только 5,7 % имеют низкий уровень готовности. Углублённый анализ готовности позволил выявить общую для всех групп закономерность: опережающее развитие ценностно-мотивационного компонента, особенно, по сравнению со слабо развитыми деятельностным и рефлексивным компонентами. С учётом вышесказанного, было издано более 40 учебных и методических пособий, разработаны учебно-методические комплексы для подготовки в сфере здоровьесбережения, не только педагогов, но и других специалистов социономических профессий.

Наши многолетние исследования были реализованы в соответствии со следующими подходами и принципами: комплексный подход; междисциплинарный характер; целостный подход; принцип ограничения научной компетенции; соблюдение строгих этических правил; конфиденциальность данных; обратная связь.

Значимость результатов комплексных исследований развития физических, социальных и психологических ресурсов человека в системе образования подтверждается различными наградами, научными грантами и результатами внедрения.

Среди наград за научные достижения, можно выделить золотую медаль «Лауреат ВВЦ» за создание комплексной программы по формированию культуры здоровья участников образовательного процесса и диплом первой степени на II Всероссийском конкурсе моделей и проектов воспитательной деятельности в вузах России за проект «Здоровый образ жизни – от преподавателя к студенту».

Актуальность и научно-практическая практическая значимость выбранного нами направления на всём протяжении подтверждалась финансовой поддержкой исследований. Среди научных исследований, с нашим участием, получили целевое финансирование из различных источников (МО РФ, Государственный контракт, ФЦП, РГНФ, РНФ), следующие темы:

«Исследование психолого-педагогических основ воспитания культуры здоровья в системе непрерывного образования» *(рук. Карасёва Т. В., 2005–2009).*

«Профилактика аддиктивного поведения учащейся молодежи» *(рук. Карасёва Т. В., 2007–2008).*

«Педагогические условия гигиенического образования детей с ограниченными возможностями интеллектуального развития» *(рук. Карасёва Т. В., 2007–2008).*

«Разработка требований к результатам освоения основных общеобразовательных программ с позиции формирования у обучающихся, воспитанников культуры здорового и безопасного образа жизни и соответствующих поведенческих стереотипов» *(рук. Синягина Н. Ю., 2009).*

«Мониторинг здоровья и формирование здорового образа жизни средствами адаптивной физической культуры» *(рук. Толстов С. Н., Карасёва Т. В., 2012–2013).*

«Разработка системы мониторинга здоровья и формирование здорового образа жизни лиц, занимающихся адаптивной физической культурой» *(рук. Толстов С. Н., 2013).*

«Охрана социального здоровья сельского населения» *(рук. Толстов С. Н., 2017).*

«Формирование социального здоровья и безопасности студентов в многонациональной образовательной среде» *(рук. Карасёва Т. В., 2020).*

«Жизнестойкость в психологической безопасности специалистов социономического профиля» *(рук. Шмелёва Е. А.)*

Итоги наших исследований отражены в различных формах внедрения в деятельность учреждений образования, здравоохранения и социальной защиты. За внедрение в практику научных разработок были получены благодарственные письма и грамоты Департамента спорта и туризма Ивановской области, Паралимпийского комитета Ивановской области, ВПП «Единая Россия», Министерства образования и Министерства здравоохранения.

В настоящее время научный коллектив направления «Комплексные исследования развития физических, социальных и психологических ресурсов человека в системе образования» представлен профессорско-преподавательским составом и аспирантами кафедры физической культуры и безопасности жизнедеятельности под руководством профессора Карасёвой Татьяны Вячеславовны. Ведущими темами, отвечающими на вызовы времени, для нас являются изучение вопросов дистанционного образования и проблемы жизнестойкости субъектов образовательного процесса.

Перспективы данного направления мы связываем с развитием комплексных исследований в рамках научно-образовательного консорциума «Иваново» и Ивановского научного центра РАО.

Информация об авторах / Information about the authors

Карасёва Татьяна Вячеславовна – доктор медицинских наук, профессор кафедры ФК и БЖД, Ивановский государственный университет, г. Иваново, Россия, akmecentr@mail.ru

Karaseva Tatiana Vyacheslavovna – Doctor of Medical Sciences, Professor of the Department of FC and BDZ, Ivanovo State University, Ivanovo, Russia, akmecentr@mail.ru

Толстова Светлана Юрьевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры ФК и БЖД, Ивановский государственный университет, г. Иваново, Россия, svetlana_tolstova16@mail.ru

Tolstova Svetlana Yurievna – Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor of the Department of FC and BDZ, Ivanovo State University, Ivanovo, Russia, svetlana_tolstova16@mail.ru

Соколов Евгений Евгеньевич – кандидат педагогических наук, доцент, заведующий кафедрой ФК и БЖД, Ивановский государственный университет, г. Иваново, Россия, sokolov_evgen_62@mail.ru

Sokolov Evgeny Evgenievich – Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of FC and BDZ, Ivanovo State University, Ivanovo, Russia, sokolov_evgen_62@mail.ru

Егорова Евгения Юрьевна – кандидат медицинских наук, доцент кафедры ФК и БЖД, Ивановский государственный университет, г. Иваново, Россия, egorovaevgenia@inbox.ru

Egorova Evgeniya Yurievna – Candidate of Medical Sciences, Associate Professor of the Department of FC and BDZ, Ivanovo State University, Ivanovo, Russia, egorovaevgenia@inbox.ru

МАТЕМАТИКА

УДК 510.5

Д. Н. Азаров

Б. Я. СОЛОН — ХРАНИТЕЛЬ И ПРОДОЛЖАТЕЛЬ ТРАДИЦИЙ ИВАНОВСКОЙ ЛОГИКО-АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ

Статья посвящена 75-летию профессора, доктора физико-математических наук Б. Я. Солона. Описаны этапы его научной и педагогической деятельности.

Ключевые слова: математическая логика, теория вычислимости, Ивановская логико-алгебраическая школа.

D. N. Azarov

B. YA. SOLON — THE KEEPER AND SUCCESSOR OF THE TRADITIONS OF IVANOVO LOGIC-ALGEBRAIC SCHOOL

The article is dedicated to the 75th anniversary of Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences B. Ya. Solon. The stages of his scientific and pedagogical activity are described.

Key words: mathematical logic, computability theory, Ivanovo logic-algebraic school.

26 апреля 2023 года исполнилось 75 лет Борису Яковлевичу Солону — доктору физико-математических наук, заведующему кафедрой фундаментальной математики Ивановского государственного университета.

Б. Я. Солон — известный математик, представитель Ивановской логико-алгебраической школы, основанной академиком А. И. Мальцевым. Его научные интересы относятся к математической логике, к той её нетривиальной и интенсивно изучаемой части, которая называется теорией вычислимости.

После окончания в 1971 году математического факультета Ивановского педагогического института Борис Яковлевич поступил в аспирантуру к Евгению Александровичу Полякову. Пройдя длинный и непростой путь в науке, он получил существенные результаты, защитил кандидатскую и докторскую диссертации в Санкт-Петербургском государственном университете. Б. Я. Солон известен в науке как авторитетный специалист в области теории вычислимости. Основные научные результаты Б. Я. Солона связаны с изучением одного из двух важнейших и наиболее общих видов относительной вычислимости — так называемой сводимости по перечислимости. Как участник международного научного проекта «Computability in Europe» («Вычислимость в Европе») он посетил целый ряд российских и зарубежных университетов, установил личные контакты со своими научными единомышленниками в разных странах мира.

В 2013 году Б. Я. Солон возглавил факультет математики и компьютерных наук ИвГУ, проделав перед этим большой путь ученого и преподавателя сначала в Шуйском педагогическом институте, а затем в Ивановском химико-технологическом университете, где заведовал кафедрой высшей математики более 15 лет. Через «его руки» прошло несколько аспирантов, большое количество студентов самых разных специальностей и направлений.

Борис Яковлевич вернулся в хорошо известный ему коллектив — почти со всеми сотрудниками факультета к тому времени он уже был знаком лично.

Судьба распорядилась так, что Борис Яковлевич возвратился на тот факультет, который когда-то закончил, и, будучи студентом и аспирантом которого, стал свидетелем эпохи, когда Ивановская математическая школа имела колоссальное значение в мировой науке, а факультет пользовался заслуженным почетом и уважением. О той эпохе Борис Яковлевич собрал обширный и очень любопытный исторический материал, который был им частично опубликован в [2] (см. также работу [1] о формировании и становлении Ивановской алгебраической школы).

С приходом Бориса Яковлевича научная жизнь на факультете заметно активизировалась. Его усилиями были организованы масштабные научные логико-алгебраические конференции. Так, например, конференция, посвященная 100-летию факультета, собрала блестящий состав участников. Гостями конференции были представители теоретико-групповых школ из Сибирского отделения РАН, Московского и Петербургского университетов, Московского педагогического университета. Приехали известные ученые из Казани, Тулы, Ярославля.

Одна из проведенных конференций была посвящена 75-летию доктора физико-математических наук, профессора Давида Ионовича Молдаванского. Из разных мест приехали ученые, которые захотели лично поздравить юбиляра. Именно благодаря авторитету Давида Ионовича кафедра алгебры и математической логики ИвГУ в течение долгого времени сохраняла свою широкую известность.

Эта известность сохраняется и теперь. Нас периодически посещают выдающиеся математики, в том числе академик Л. Д. Беклемишев (внук А. И. Мальцева). Научная коллаборация кафедры фундаментальной математики ИвГУ с учеными из МГУ и Сибирского отделения РАН состоялась в полной мере. Ее результатами стали ряд совместных статей, регулярное оппонирование кандидатских и докторских диссертаций.

Борис Яковлевич и Давид Ионович были членами диссертационного совета при Ярославском государственном университете, в котором прошло немало защит диссертаций наших ивановских математиков. Диссертационная активность на факультете за последние 10 лет была достаточно высокой — состоялись защиты четырех диссертаций, в том числе докторских диссертаций Д. Н. Азарова (2017) и Е. В. Соколова (2023).

Продолжил работу научно-исследовательский семинар кафедры алгебры и математической логики, который долгое время возглавлял Давид Ионович, передавший эти обязанности автору настоящей статьи. Усилиями Бориса Яковлевича семинар посетили выдающиеся учёные с научными докладами и лекциями для студентов и аспирантов. На семинаре выступали профессора из Москвы, Санкт-Петербурга, и, разумеется, ивановские математики. В 2017 году ИвГУ посетил Александр Юрьевич Ольшанский — выдающийся математик, профессор Московского университета, одновременно работающий в одном из университетов США. Он приобрел всемирную известность в области теории групп, решив знаменитую проблему О. Ю. Шмидта.

Преподавательская работа Бориса Яковлевича тесно связана с его научными интересами. Наряду с базовым курсом по математической логике и теории алгоритмов он читает несколько интересных авторских курсов для студентов магистратуры и аспирантов. Список преподаваемых им дисциплин весьма широк, и определяется не только его научными интересами, но также и необходимостью выполнения кафедрой учебного плана. Немало времени и сил потребовалось для того, чтобы организовать работу по внедрению новых образовательными программ и стандартов, «пережить» несколько волн государственной аккредитации.

Одновременно с деканством Борис Яковлевич возглавил также и кафедру алгебры и математической логики, приняв заведование от Д. И. Молдаванского. Не столь давно среди математиков нашего университета существовало мнение о том, что кафедра алгебры и математической логики сохранится и будет работать при любых обстоятельствах. К сожалению, этого не случилось, но в результате слияния математических кафедр в университете появилась кафедра фундаментальной математики, которая безусловно имеет определенные перспективы как в науке, так и в учебном процессе.

Очень важным является тот факт, что коллектив преподавателей по мере возможностей оказывал Борису Яковлевичу необходимую поддержку. Его заместителями были Е. В. Еремина и Т. В. Голубева. Секретарем кафедры работала Е. А. Катреча. В целом атмосфера в коллективе располагала как к учебной работе, так и к научному творчеству.

В условиях реорганизации факультетов и кафедр Борису Яковлевичу удалось сохранить значительную часть научно-педагогического коллектива математиков, который сформировался в университете на протяжении долгих лет. Неоспоримым результатом его работы является тот факт, что математика в университете сохранилась во всех смыслах этого слова — как направление подготовки студентов, как направление научной работы преподавателей и как образ жизни тех людей, которые считают себя причастными к этой великой и воистину «сверхъестественной» науке.

Бориса Яковлевича отличают высокий профессионализм, мудрый и рациональный взгляд на жизнь, а также внимательное и уважительное отношение к коллегам.

Как принято писать в юбилейных статьях, юбиляр находится в расцвете творческих сил и полон идей и замыслов. В данном случае это верно безусловно, без каких-либо оговорок. Юбилей — это повод выразить искреннюю признательность и благодарность нашему замечательному коллеге — Борису Яковлевичу Солону, хранителю и продолжателю традиций Ивановской логико-алгебраической школы.

Желаем Борису Яковлевичу здоровья и новых успехов в его научной и преподавательской работе.

Библиографический список

1. *Молдаванский Д. И.* Комбинаторная теория групп в Ивановском государственном университете // Чебышевский сборник. 2014. Т. 15, № 4. С. 32–54.
2. *Солон Б. Я.* Математика и математики в Ивановском государственном университете // Алгебра и теория алгоритмов: Всероссийская конференция, посвященная 100-летию факультета математики и компьютерных наук Ивановского государственного университета: сборник материалов. Иваново: Иван. гос. ун-т, 2018. С. 6–10.

Информация об авторе / Information about the author

Азаров Дмитрий Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры фундаментальной математики, Ивановский государственный университет, г. Иваново, Россия, azarovdn@mail.ru

Azarov Dmitrii Nikolaevich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Fundamental Mathematics, Ivanovo State University, Ivanovo, Russia, azarovdn@mail.ru

ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ АВТОРОВ ЖУРНАЛА «ВЕСТНИК ИВАНОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА»

К публикации принимаются научные статьи, выполненные в строгом соответствии с требованиями к оформлению рукописей. Материалы, не отвечающие предъявляемым требованиям, к рассмотрению не принимаются.

Максимальный размер статьи – 1,0 авт. л. (40 тыс. знаков с пробелами), выполненного в редакторе Microsoft Word шрифтом Times New Roman (основной текст – кегль 11; таблицы, подписи к рисункам, сноски, библиографический список – кегль 10). Формат А4, поля: верхнее – 2,7 см, нижнее – 4,6 см, левое и правое – 4 см.

Материал должен быть оформлен в следующей последовательности: **УДК**, на *русском и английском языках*: **инициалы и фамилия автора, название материала**, для научных статей – **аннотация** (объемом 10–15 строк), **ключевые слова; текст статьи**.

Библиографические источники должны быть пронумерованы в алфавитном порядке, ссылки даются в тексте статьи в квадратных скобках в строгом соответствии с пристатейным списком литературы. Библиографическое описание литературных источников к статье оформляется в соответствии с ГОСТами 7.1–2003, 7.0.5–2008. В каждом пункте библиографического списка, составленного в алфавитном порядке (сначала произведения на русском языке, затем на иностранном), приводится одна работа. В выходных сведениях обязательно указание издательства и количества страниц, в ссылке на электронный ресурс – даты обращения.

Фотографии и рисунки, прилагаемые к статье, должны быть контрастными, четкими.

В конце представленных материалов следует указать сведения об авторе на русском и английском языках (фамилия, имя, отчество автора, ученая степень, звание, должность, место работы, город, страна, электронный адрес).

Направление в редакцию ранее опубликованных и принятых к печати в других изданиях работ не допускается.

Редакция оставляет за собой право осуществлять литературную правку, корректирование и сокращение текстов статей.

Рукописи аспирантов публикуются бесплатно.

ПРАВИЛА РЕЦЕНЗИРОВАНИЯ СТАТЕЙ

1. Статьи авторов, являющихся преподавателями, сотрудниками или обучающимися ИвГУ, принимаются редакционной коллегией соответствующей серии (выпуска) на основании письменного решения (рекомендации) кафедры или научного подразделения ИвГУ и рецензии доктора наук, не являющегося научным руководителем (консультантом), руководителем или сотрудником кафедры или подразделения, где работает автор.

2. Статьи авторов, не работающих и не обучающихся в ИвГУ, принимаются редакционной коллегией соответствующей серии (выпуска) на основании рекомендации их вуза или научного учреждения и рецензии доктора наук, работающего в ИвГУ.

3. Поступившие статьи проходят далее рецензирование одного из членов редколлегии соответствующей серии (выпуска), являющегося специалистом в данной области.

4. Статья принимается к публикации при наличии двух положительных рецензий и положительного решения редколлегии серии (выпуска). Порядок и очередность публикации статьи определяются в зависимости от объема публикуемых материалов и тематики выпуска.

5. В случае отклонения статьи автору направляется аргументированный отказ в письменной (электронной) форме. Авторы имеют право на доработку статьи или ее замену другим материалом.

Электронное сетевое издание

ВЕСТНИК
ИВАНОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия «Естественные, общественные науки»
2023. Вып. 4

[12+]

Издается в авторской редакции

директор издательства *Л. В. Михеева*
технический редактор *И. С. Сибирева*

Дата размещения на сайте 18.12.2023 г.
Формат 70 × 108$^1/_{16}$. Уч.-изд. л. 5,5. Объем 3,83 МБ.

Издательство «Ивановский государственный университет»
🖂 153025 Ивановская обл., г. Иваново, ул. Ермака, 39
☏ (4932) 93-43-41. E-mail: publisher@ivanovo.ac.ru