



Основная профессиональная образовательная программа  
02.04.01 Математика и компьютерные науки  
(Математические методы в компьютерных науках)

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ИВАНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра фундаментальной математики

ОДОБРЕНО:

Руководитель ОП

(подпись)

Д.Н. Азаров

« 01 » сентября 20 22 г.

Рабочая программа дисциплины

Кольца и модули

Уровень высшего образования:	магистратура
Квалификация выпускника:	магистр
Направление подготовки:	02.04.01 Математика и компьютерные науки
Направленность (профиль) образовательной программы:	Математические методы в компьютерных науках

Иваново



### **1. Цели освоения дисциплины «Кольца и модули»:**

- получение студентами базовых знаний по теории колец (включая теорию конечномерных линейных алгебр над полями, общую теорию колец и модулей над кольцами, теорию радикалов колец), по теории колец и модулей с дополнительными условиями (включая теорию нётеровых и артиновых колец и модулей, теорию вполне приводимых колец и модулей, теорию модульных эндоморфизмов), по другим разделам общей алгебры (включая теорию полей и теорию представлений конечных групп);

- формирование у студентов общей математической культуры, в том числе способности к осмысленному восприятию и воспроизведению абстрактных определений, теорем и их доказательств, а также способности к самостоятельным абстрактным математическим рассуждениям, способности решать задачи теоретического характера по теории колец;

- формирование у студентов навыков научно-исследовательской работы (способности самостоятельно доказывать простые утверждения, выдвигать гипотезы, подтверждать или опровергать их, развивать математическую интуицию).

### **2. Место дисциплины в структуре ОП**

Дисциплина «Кольца и модули» относится к части ОП, формируемой участниками образовательных отношений.

Дисциплина «Кольца и модули» завершает «алгебраический цикл» образовательной программы магистратуры и способствует научной работе студентов в рамках выполнения НИР и написания квалификационных работ по алгебраической тематике. На этой дисциплине основаны многие дисциплины алгебраического цикла для аспирантов, работающих по научной специальности 01.01.06 – Математическая логика алгебра и теория чисел.

Дисциплина в некоторой степени опирается на магистерские дисциплины «Основы теории групп» и «Современная теория групп». В более значительной степени она опирается на бакалаврскую дисциплину «Алгебра» и на другие бакалаврские дисциплины алгебраического цикла по направлениям «Математика» и «Математика и компьютерные науки».

Для успешного изучения дисциплины «Кольца и модули» необходимы «входные» знания и умения в области математики, полученные в процессе обучения по программе бакалавриата, в том числе обучающийся должен

**знать** линейную алгебру, теорию групп и элементы теории колец в объеме, предусмотренном рабочими программами бакалаврских курсов «Алгебра» и «Дополнительные главы алгебры»,

**уметь** работать с абстрактными алгебраическими системами,

**иметь** навыки математических рассуждений, достаточный уровень математической культуры.

### **3. Планируемые результаты обучения по дисциплине**

#### **3.1. Компетенции, формированию которых способствует дисциплина**

Учебным планом при освоении данной дисциплины предусмотрено формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО по данному направлению подготовки:

- профессиональные (ПК):

ПК-3. Способен выявлять актуальные научные проблемы в области фундаментальной и прикладной математики и компьютерных наук, разрабатывать подходы к их решению.



### **3.2. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с индикаторами достижения формируемых компетенций.**

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

**Знать:** фундаментальные понятия, классические результаты (теоремы) с доказательствами, современную проблематику и направления исследований по следующим разделам современной алгебры: общая теория колец (включая теорию конечномерных линейных алгебр над полями, общую теорию колец и модулей над кольцами, теорию радикалов колец), теория колец и модулей с дополнительными условиями (включая теорию нётеровых и артиновых колец и модулей, теорию вполне приводимых колец и модулей, теорию модульных эндоморфизмов), другие разделы общей алгебры (включая теорию полей и теорию представлений конечных групп (ПК-3.1).

**Уметь:** осмысленно воспринимать и воспроизводить абстрактные определения, теоремы и доказательства, логически мыслить, самостоятельно рассуждать и доказывать простые утверждения в области теории колец, устанавливать логические связи между понятиями, корректно формулировать и осмысленно решать учебные задачи теоретического характера, воспроизводить и творчески перерабатывать доказательства классических теорем теории колец и теории полей, обосновывать или опровергать научные гипотезы, четко и ясно излагать в устной и письменной форме математические тексты, в том числе собственные и «чужие» научные результаты (ПК-3.2).

**Иметь:** навыки работы с абстрактными алгебраическими системами, навыки научно-исследовательской работы в области современной алгебры, высокий уровень математической культуры и интуиции, возникающей на основе глубоких знаний и постоянных размышлений над алгебраической задачей (или проблемой), навыки перехода от интуитивных научных идей к их четкому и ясному изложению в надлежащем виде, достаточный уровень информационной и библиографической культуры в процессе поиска научной информации (ПК-3.3).

### **4. Объем и содержание дисциплины**

Объем дисциплины составляет 5 зачетных единиц (180 академических часов).

#### **4.1. Содержание дисциплины по разделам (темам), соотнесенное с видами и трудоемкостью занятий лекционно-семинарского типа**

Объем иной контактной работы и самостоятельной работы обучающегося по дисциплине указан в учебном плане образовательной программы.



Основная профессиональная образовательная программа  
02.04.01 Математика и компьютерные науки  
(Математические методы в компьютерных науках)

№ п/ п	Разделы (темы) дисциплины	Семестр	Виды занятий, их объем (в ак. часах, по очной форме обучения)		Формы текущего контроля успеваемости (по очной форме обучения)  Формы промежуточной аттестации
			Занятия лекцион- ного типа	Занятия семинар- ского типа	
1. Введение в теорию колец и модулей					
1.1	Первоначальные сведения о кольцах	3	2	2	
1.2	Линейные алгебры над полем	3	2	2	
1.3	Первоначальные сведения о модулях над кольцами	3	2	2	
1.4	Аннуляторы модулей	3	2	0	
1.5	Радикалы колец	3	2	2	
1.6	Прямые суммы модулей. Свободные модули	3	2	0	
1.7	Нётеровы и артиновы модули и кольца	3	2	2	
1.8	Вполне приводимые модули и кольца	3	1	0	
1.9	Продолжение теории артиновых колец	3	0	2	
1.10	Модульные эндоморфизмы	3	1	0	
Введение в теорию полей и в теорию представлений групп					
2.1	Элементы теории представлений конечных групп	3	0	2	
2.2	Расширения полей	3	0	2	
Итого за 3-й семестр			18	16	Экзамен
Итого по дисциплине			16	16	

#### 4.2. Развернутое описание содержания дисциплины по разделам (темам)

##### Раздел 1. Введение в теорию колец и модулей

**Тема 1.1. Первоначальные сведения о кольцах.** Понятия кольца, тела, поля. Кольцо многочленов, кольцо формальных степенных рядов, матричные кольца, прямые суммы колец, внешнее присоединение единицы и другие способы построения колец. Левые, правые и двусторонние идеалы, фактор-кольца, гомоморфизмы колец, теоремы о гомоморфизмах и изоморфизмах. Максимальные и минимальные идеалы. Существование максимальных идеалов в кольце с единицей.



**Тема 1.2. Линейные алгебры над полем.** Определение и примеры линейных алгебр над полем. Групповая алгебра. Алгебра кватернионов. Алгебры с делением. Теорема Фробениуса. Вложение конечно-мерной алгебры в матричную алгебру.

**Тема 1.3. Первоначальные сведения о модулях над кольцами.** Определение и примеры модуля над кольцом. Кольцо как модуль над самим собой. Подмодули, системы порождающих для модуля, конечно порожденные и циклические модули. Модульные гомоморфизмы, фактор-модули и теоремы о модульных гомоморфизмах. Описание с точностью до изоморфизма всех неприводимых правых модулей над кольцом как фактор-модулей этого кольца по его максимальным правым идеалам.

**Тема 1.4. Аннуляторы модулей.** Связь между модулями над кольцом и представлениями этого кольца. Аннулятор модуля и его совпадение с ядром соответствующего представления. Теорема о совпадении пересечения всех максимальных правых идеалов кольца с единицей и пересечения аннуляторов всех неприводимых правых модулей над этим кольцом; замечание о том, что указанное пересечение является двусторонним идеалом данного кольца.

**Тема 1.5. Радикалы колец.** Равносильные определения радикального свойства колец. Примеры радикальных свойств: квазирегулярность и свойство НИЛЬ. Радикалы, соответствующие двум указанным свойствам: радикал Джекобсона и нильрадикал (верхний нильрадикал Кётэ). Включение нильрадикала кольца в радикал Джекобсона этого кольца, совпадение этих радикалов в артиновом кольце, пример кольца, в котором указанное включение является строгим. Характеризация радикала Джекобсона кольца с единицей как пересечения всех максимальных правых (левых) идеалов этого кольца и как пересечения аннуляторов всех неприводимых правых (левых) модулей над этим кольцом.

**Тема 1.6. Прямые суммы модулей. Свободные модули.** Внешние и внутренние прямые суммы. Теорема Ремака. Различные определения свободного модуля. Базы. Теорема о свободе подмодулей свободного модуля над кольцом главных идеалов. Теорема об инвариантном базовом числе для свободного модуля над коммутативным кольцом.

**Тема 1.7. Нётеровы и артиновы модули и кольца.** Различные определения нётеровых и артиновых модулей. Замкнутость класса всех нётеровых (артиновых) модулей, относительно подмодулей, фактор-модулей, расширений и конечных прямых сумм. Характеризация нётеровых и одновременно артиновых модулей, как модулей конечной длины (т.е. модулей, обладающих композиционным рядом). Теорема Жордана – Гёльдера. Нётеровы и артиновы кольца (слева и справа). Пример кольца нётерова и артинова слева, которое не нётерово и не артиново справа. Нётеровость (артиновость) конечно порожденного правого модуля над кольцом нётеровым (артиновым) справа. Теорема Гильберта о базисе.

**Тема 1.8. Вполне приводимые модули и кольца.** Равносильные определения вполне приводимого модуля. Замкнутость класса всех вполне приводимых модулей относительно подмодулей и фактор-модулей. Равносильность артиновости и нётеровости для вполне приводимого модуля. Характеризация вполне приводимых модулей конечной длины как артиновых модулей с нулевым радикалом. Вполне приводимые кольца. Характеризация вполне приводимых колец как артиновых справа колец с нулевым радикалом Джекобсона. Вполне приводимость модуля над вполне приводимым кольцом. Структурная теорема Веддербарна – Артина для вполне приводимых колец (доказательство в разделе 3.10) и её следствия. Теорема Машке о групповой алгебре конечной группы.

**Тема 1.9. Продолжение теории артиновых колец.** Нильпотентность радикала Джекобсона артинова справа кольца. Артиново справа кольцо как расширение нильпотентного



Основная профессиональная образовательная программа  
02.04.01 Математика и компьютерные науки  
(Математические методы в компьютерных науках)

---

кольца с помощью вполне приводимого кольца. Теорема о нётеровости справа для артинова справа кольца с единицей.

**Тема 1.10. Модульные эндоморфизмы.** Кольцо модульных эндоморфизмов. Изоморфное представление кольца с единицей модульными эндоморфизмами. Лемма Шура о кольце эндоморфизмов неприводимого модуля. Кольцо эндоморфизмов вполне приводимого модуля конечной длины - как прямая сумма матричных колец над телами. (В качестве следствия из последнего результата получается структурная теорема Веддербарна – Артина).

## **Раздел 2. Введение в теорию полей и в теорию представлений групп**

**Тема 2.1. Элементы теории представлений конечных групп.** Первоначальные сведения о представлениях групп: эквивалентные представления, подпредставления, неприводимые представления, прямая сумма представлений, теорема Машке, групповая алгебра конечной группы и размерность её центра, модуль представления, равносильность неприводимости представления и неприводимости его модуля. Применение структурной теоремы о вполне приводимых кольцах к доказательству теоремы о числе и размерностях неэквивалентных неприводимых комплексных представлений конечной группы. (Упомянутая структурная теорема позволяет сначала доказать соответствующий результат для модулей над групповой алгеброй.)

**Тема 2.2. Расширения полей.** Конечные и алгебраические расширения полей. Теорема о строении простого алгебраического расширения. Конечность (алгебраичность) башни расширений с конечными (алгебраическими) этажами. Поле алгебраических чисел. Поле разложения. Конечные поля. Алгебраическое замыкание поля. Теорема о примитивном элементе.

## **5. Образовательные технологии**

Технология проблемного обучения – демонстрация на лекциях и практических занятиях проблемных ситуаций. Проблемы учебного характера как правило формулируются в виде задач и решаются студентами самостоятельно и на практических занятиях под руководством и при поддержке преподавателя. Решение каждой задачи – это не только формулы; оно должно иметь четкую логическую структуру, содержать необходимые доказательства, пояснения, комментарии, ссылки на теоретические факты.

Информационные технологии: технологии смешанного обучения, использование компьютерных презентаций, обеспечение студентов текстами лекций в электронной форме.

## **6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся**

Самостоятельная работа студентов состоит в следующем: еженедельная работа с рукописными и электронными конспектами лекций (материалы выдаются студентам по мере необходимости), изучение литературы указанной в разделе 8 рабочей программы, выполнение домашних заданий (задания выдаются на каждом практическом занятии, и, при необходимости, в системе электронной поддержки образовательного процесса «Мой университет» <https://uni.ivanovo.ac.ru>), подготовка к решению задач, предлагаемых на экзамене (разработаны комплекты типовых задач), подготовка к экзаменам (вопросы и другие материалы для сдачи экзаменов доступны каждому студенту как в бумажном виде (в ауд. 326 первого уч. корпуса) так и в системе «Мой университет»). Методические пособия по данному курсу находятся в библиотечных фондах ИвГУ, их выходные данные представлены в **приложениях** к рабочей программе. Там же представлены и другие методические материалы по данной дисциплине.



## **7. Характеристика оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине**

Итоговой формой контроля является устный экзамен. Экзаменационный билет содержит 2 вопроса. Кроме того, студенту выдается задача. Ответ на каждый вопрос оценивается отдельно следующим образом.

### **Критерии и шкала оценки ответа на экзаменационный вопрос.**

Если студент демонстрирует знание основных понятий и классических результатов алгебры, входящих в программу экзамена, то оценка должна быть положительной.

Если наряду с перечисленным выше студент осмысленно воспроизводит доказательства математических теорем, четко и аккуратно формулирует математические высказывания, демонстрирует глубокие знания и достаточный уровень математической культуры, то ему выставляется либо оценка «хорошо» либо оценка «отлично».

Если наряду с перечисленным выше студент умеет самостоятельно доказывать математические теоремы на основе глубоких знаний и математической интуиции, способен к научной дискуссии и к самостоятельной исследовательской деятельности в области математики, то ему выставляется оценка «отлично».

### **Критерии и шкала оценки решения задачи:**

Оценка «удовлетворительно» ставится, если студент знает подходы и методы решения предложенной ему задачи, но в процессе решения допустил существенную вычислительную или логическую ошибку.

Оценка «хорошо» ставится, если задача решена правильно (или с незначительной ошибкой, которую студент самостоятельно устранил по ходу ответа), но решение сделано по «формальной схеме» и не подкрепляется глубокими знаниями.

Оценка «отлично» ставится, если задача решена правильно (или с незначительной ошибкой, которую студент самостоятельно устранил по ходу ответа) и при этом решение задачи подкрепляется глубокими знаниями и высоким уровнем математической культуры.

### **Критерии и шкала итоговой оценки на экзамене.**

В качестве итоговой оценки берется результат округления среднего значения следующих трех показателей: оценка ответа на первый экзаменационный вопрос, оценка ответа на второй экзаменационный вопрос, оценка решения задачи.

## **8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

Основная литература:

1. Кострикин, А.И. Введение в алгебру : учебник / А.И. Кострикин. - М. : МЦНМО, 2009. - Ч. 1. Основы алгебры. - 273 с. - ISBN 978-5-94057-453-8 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63140>

2. Кострикин, А.И. Введение в алгебру : учебник / А.И. Кострикин. - М. : МЦНМО, 2009. - Ч. 2. Линейная алгебра. - 368 с. - ISBN 978-5-94057-454-5 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63144>

3. Кострикин, А.И. Введение в алгебру : учебник / А.И. Кострикин. - М. : МЦНМО, 2009. - Ч. 3. Основные структуры алгебры. - 272 с. - ISBN 978-5-94057-455-2 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=62951>

Дополнительная литература:

1. Сборник задач по алгебре : задачник / под ред. А.И. Кострикин. - М. : МЦНМО, 2009. - 404 с. - ISBN 978-5-94057-413-2 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63274>

Ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:



Основная профессиональная образовательная программа  
02.04.01 Математика и компьютерные науки  
(Математические методы в компьютерных науках)

---

Система электронной поддержки образовательного процесса «Мой университет»  
<https://uni.ivanovo.ac.ru>

Общероссийский математический портал <http://www.mathnet.ru/>

Профессиональные базы данных и информационно-справочные системы:

ЭБС «Университетская библиотека онлайн» [www.biblioclub.ru](http://www.biblioclub.ru)

Электронная библиотека ИвГУ <http://lib.ivanovo.ac.ru>

Электронный каталог НБ ИвГУ <http://lib.ivanovo.ac.ru/index.php/ek>

Программное обеспечение: операционная система Microsoft Windows, пакет офисных программ Microsoft Office и(или) LibreOffice, интернет-браузер Microsoft Edge и(или) Yandex Browser.

### **9. Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Учебные аудитории:

- для проведения занятий лекционного типа с комплектом специализированной учебной мебели и техническими средствами обучения, служащими для предоставления учебной информации большой аудитории;

- для проведения занятий семинарского типа, консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации с комплектом специализированной учебной мебели и техническими средствами обучения;

Помещение для самостоятельной работы, оснащенное комплектом специализированной учебной мебели, компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в ЭИОС.

Демонстрационное оборудование: доска, проектор для презентаций.





Основная профессиональная образовательная программа  
02.04.01 Математика и компьютерные науки  
(Математические методы в компьютерных науках)

---

**Автор(ы) рабочей программы дисциплины:** профессор кафедры алгебры и математической логики ИвГУ, доктор физико-математических наук Азаров Дмитрий Николаевич

Программа рассмотрена и утверждена на заседании кафедры фундаментальной математики  
«1» сентября 2022 г., протокол № 1.

Программа обновлена  
протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

Согласовано:

Руководитель ОП \_\_\_\_\_ Д.Н. Азаров  
(подпись)

Программа обновлена  
протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

Согласовано:

Руководитель ОП \_\_\_\_\_ Д.Н. Азаров  
(подпись)

Программа обновлена  
протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

Согласовано:

Руководитель ОП \_\_\_\_\_ Д.Н. Азаров  
(подпись)