



Основная профессиональная образовательная программа  
01.03.01 Математика  
(Математика, алгоритмы и анализ данных)

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

**ИВАНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

Кафедра фундаментальной математики

ОДОБРЕНО:

Руководитель ОП

\_\_\_\_\_  
(подпись)

Ю.А.Хашина

«\_1\_» сентября 2023 г.

**Рабочая программа дисциплины**

Алгебраические основы криптографии

Уровень высшего образования:	бакалавриат
Квалификация выпускника:	бакалавр
Направление подготовки:	Математика
Направленность (профиль) образовательной программы:	Математика, алгоритмы и анализ данных



Основная профессиональная образовательная программа  
01.03.01 Математика  
(Математика, алгоритмы и анализ данных)

## 1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Алгебраические основы криптографии» являются:

- 1) получение базовых знаний в основополагающих разделах алгебры: элементы теории чисел, полей и колец;
- 2) знакомство с некоторыми ключевыми криптографическими алгоритмами и их использованием.

При освоении дисциплины развивается общематематическая культура, приобретаются навыки практических вычислений, качественного и численного исследования изучаемых проблем.

## 2. Место дисциплины в структуре ОП

Дисциплина «Алгебраические основы криптографии» входит в обязательную часть учебного плана. Для ее успешного изучения необходимы «входные» знания и умения в области математики, полученные в процессе обучения по программе средней школы, а также знание основных сведений курса «Алгебра», читаемого в первом и втором семестрах.

Дисциплина является составной, призвана демонстрировать взаимодействие и взаимное проникновение алгебраических понятий и методов нескольких дисциплин. Кроме того, этот курс связан также с такими дисциплинами учебного плана как «Математический анализ», «Дискретная математика», «Практикум по элементарной математике», «Основы информационной безопасности», «Математическая логика и теория алгоритмов». Эти дисциплины предоставляют материал для примеров и служат сферой ключевых приложений алгебраических теорий и алгоритмов. Взаимная зависимость алгебры, геометрии, анализа и дискретной математики является глубокой и прослеживается на всем протяжении изучения математики. Следующие дисциплины, изучаемые на втором-четвертом курсах, также используют материал данного курса: «Организационное и правовое обеспечение информационной безопасности», «Программно-аппаратные средства защиты информации», «Методы и средства криптографической защиты информации», «Криптографические протоколы» и другие.

Для освоения данной дисциплины обучающийся должен:

Знать: содержание основных разделов школьного курса математики и курса «Алгебра» (1 и 2 семестры).

Уметь: преобразовывать алгебраические выражения, решать алгебраические уравнения и неравенства, свободно оперировать алгебраическими понятиями и использовать известные алгебраические результаты при решении теоретических задач.

Иметь: навыки математических рассуждений и доказательств.

## 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине

### 3.1. Компетенции, формированию которых способствует дисциплина

При освоении дисциплины формируются следующие компетенции в соответствии с ФГОС ВО по данному направлению подготовки: ОПК-2; ПК-1

Общекультурные (ОК): нет

Общепрофессиональные (ОПК):

ОПК-2. Способен разрабатывать, анализировать и внедрять новые математические модели в современных естествознании, технике, экономике и управлении.

Профессиональные компетенции (ПК):

ПК-1. Способен выявлять актуальные научные проблемы в своей области специализации и решать их под руководством специалистов более высокой квалификации.

**3.2. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с индикаторами достижения формируемых компетенций**



Основная профессиональная образовательная программа  
01.03.01 Математика  
(Математика, алгоритмы и анализ данных)

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

**Знать:**

- основы теории чисел, теории колец и полей, включая их приложения к криптографическому анализу (ОПК-2; ПК-1);
- основные понятия и классические результаты алгебры, теории чисел, теории колец и полей; основные алгебраические алгоритмы и некоторые алгоритмы криптографии (ОПК-2; ПК-1).

**Уметь:**

- воспроизводить доказательства основных классических результатов теории чисел, теории колец и полей, строить новые доказательства (ОПК-2; ПК-1);
- корректно ставить математические задачи и решать их (ОПК-2; ПК-1);
- решать задачи на основы теории делимости, теории сравнимости, (ОПК-2; ПК-1);
- решать задачи на шифрование с открытым ключом (ОПК-2; ПК-1);

**Владеть:**

- высоким уровнем математической и информационной культуры, навыками самостоятельной исследовательской работы (ОПК-2; ПК-1);
- навыками владения методами и алгоритмами теории чисел, теории колец и полей, криптографии в том числе с применением вычислительной техники (ОПК-2; ПК-1);
- навыками работы с алгебраическими объектами различной природы в том числе с применением вычислительной техники (ОПК-2; ПК-1)

**4. Объем и содержание дисциплины**

Объем дисциплины составляет 4 зачетных единицы (144 академических часа).

**4.1. Содержание дисциплины по разделам (темам), соотнесенное с видами и трудоемкостью занятий лекционно-семинарского типа**

Объем иной контактной работы и самостоятельной работы обучающегося по дисциплине указан в учебном плане образовательной программы.

№ п/п	Разделы (темы) дисциплины	Семестр	Виды занятий, их объем (в ак. часах, по очной форме обучения)		Формы текущего контроля успеваемости (по очной форме обучения)
			Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Формы промежуточной аттестации
1.	Кольцо целых чисел. Вопросы делимости целых чисел. НОД, алгоритм Евклида и его модификации. Простые числа. Основная теорема арифметики.	3	4	4	Контрольная работа №1
2.	Сравнения целых чисел по заданному модулю. Вычисление остатков. Установление признаков делимости. Кольцо классов вычетов по данному модулю. Функция Эйлера. Применение теорем Эйлера и Ферма.	3	6	4	
3.	Сравнение с неизвестной величиной	3	2	2	Контрольная работа №2
4.	Криптография с открытым ключом	3	2	2	
5.	Системы сравнений первой	3	2	2	Контрольная работа №3



Основная профессиональная образовательная программа  
01.03.01 Математика  
(Математика, алгоритмы и анализ данных)

	степени				
6.	Сравнения высших степеней	3	2	1	
7.	Сравнения второй степени по простому модулю. Двучленные сравнения	3	2	2	
8.	Квадратичные вычеты и невычеты	3	2	2	Контрольная работа №4
9.	Степенные вычеты	3	2	2	
10.	Первообразные корни	3	1	2	
11.	Индексы	3	1	2	Контрольная работа №5
12.	Алгебраические расширения полей	3	6	2	
13.	Элементы теории Галуа	3	3	3	
14.	Алгоритм дискретного логарифмирования	3	1	2	Контрольная работа №6
.					
Итого по дисциплине:			36	32	

#### 4.2. Развернутое описание содержания дисциплины по разделам (темам)

1. *Кольцо целых чисел.* Основные понятия. Принцип математической индукции и метод бесконечного спуска. Типы колец. Свойства кольца целых чисел. Делители нуля. Отсутствие делителей нуля в кольце целых чисел и возможность сокращения частей равенства на ненулевой множитель.

2. *Делимость целых чисел. Свойства отношения делимости.* Определение отношения делимости. Связь отношения делимости с операцией деления. Свойства отношения делимости. Некоторые алгоритмы решения типовых задач на применение свойств отношения делимости.

3. *НОД и НОК целых чисел.* Основные определения, свойства, представление НОД двух целых чисел в виде линейной комбинации с целочисленными коэффициентами этих чисел. Теорема о связи НОД и НОК. Алгоритм Евклида и его модификации (бинарный и расширенный алгоритмы Евклида).

4. *Простые числа. Основная теорема арифметики.* Понятие и основные свойства простых чисел. Основная теорема арифметики и некоторые ее следствия. Применение этих результатов при решении задач.

5. *Сравнения целых чисел по натуральному модулю.* Определение отношения сравнения. Отношение сравнения как отношение эквивалентности. Классы вычетов. Системы вычетов по данному модулю. Свойства отношения сравнимости. Некоторые алгоритмы решения типовых задач.

6. *Вычисление остатков с помощью сравнений. Установление признаков делимости.* Существование системы счисления с произвольным натуральным основанием, большим единицы. Основная теорема о признаках делимости и ее следствия.

7. *Кольцо классов вычетов по заданному натуральному модулю. Модулярная арифметика.* Операции сложения и умножения на множестве классов вычетов по заданному натуральному модулю. Множество классов вычетов как кольцо. Свойства. Применение к решению задач.

8. *Функция Эйлера. Приведенная система вычетов.* Определение функции Эйлера. Вычисление функции Эйлера для простого значения аргумента, мультипликативность функции Эйлера, общая формула вычисления функции Эйлера в произвольной натуральной точке. Приведенная система вычетов. Ее свойства. Теоремы Эйлера и Ферма. Некоторые приложения этих теорем.

9. *Сравнение с неизвестной величиной.* Основные понятия. Теорема о числе решений сравнения произвольной натуральной степени. Линейное сравнение. Теорема о разрешимости и



Основная профессиональная образовательная программа  
01.03.01 Математика  
(Математика, алгоритмы и анализ данных)

числе решений линейного сравнения. Решение неопределенного линейного уравнения с помощью сравнений.

10. *Криптография с открытым ключом*. Основные понятия. Теорема Эйлера в шифровании RSA. Алгоритм криптосистемы RSA. Цифровая подпись.

11. *Системы сравнений первой степени*. Основные определения. Китайская теорема об остатках. Алгоритмы решения систем линейных сравнений. Примеры.

12. *Системы сравнений высших степеней*. Основные понятия, алгоритмы.

13. *Сравнения второй степени по простому модулю. Двучленные сравнения*. Основные понятия. Теорема и приведении произвольного сравнения второй степени к двучленному. Число решений двучленного сравнения.

14. *Квадратичные вычеты и невычеты*. Основные определения. Свойства квадратичных вычетов и невычетов. Закон взаимности. Применение его к решению задач.

15. *Степенные вычеты*. Показатель натурального числа по натуральному модулю. Свойства. Решение степенного сравнения.

16. *Первообразные корни*. Определения, свойства. Решение задач.

17. *Индексы*. Определения, основные свойства. Применение к решению задач.

18. *Алгебраические расширения полей*. Определения. Расширение поля. Конечно порожденное расширение. Конечное расширение. Алгебраические расширения. Свойства.

19. *Конечные поля. Теория Галуа*.

20. *Алгоритм дискретного логарифмирования*. Определения. Алгоритм. Решение задач.

## 5. Образовательные технологии

Лекции с использованием компьютерных презентаций. Демонстрация проблемных ситуаций в развитии математического знания, связанных с разнообразными приложениями математики (в том числе, в области информационных технологий).

Практические занятия с использованием активных форм, в частности, - технологий *проблемного обучения* (не менее 30% занятий). Основной тип проблемных ситуаций - *решение учебных проблем*, чем обеспечивается сознательность, глубина и прочность знаний, повышение уровня самостоятельности обучающихся, выработка у них способности к актуализации ранее полученных и вновь приобретаемых знаний.

Важным аспектом организации учебного процесса является *параллельное* изучение алгебраических и геометрических разделов.

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине: технологии смешанного обучения.

## 6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа студентов состоит в следующем: работа с конспектами лекций, изучение литературы, выполнение домашних заданий, подготовка к экзаменам.

Методический материал по обеспечению самостоятельной работы студентов приводится в Приложении 1 к рабочей программе.

## 7. Характеристика оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Предусмотрены:

- письменные контрольные работы;

- зачет с оценкой в четвертом семестре, программа которого включает как теоретические вопросы, так и практическую часть (задачи); оценка по практической части формируется по совокупности результатов контрольных работ (в данном семестре).



Основная профессиональная образовательная программа  
01.03.01 Математика  
(Математика, алгоритмы и анализ данных)

Фонд контрольных заданий по дисциплине является мобильным; критерии оценки вырабатываются оперативно; предусматривается своевременное ознакомление студентов с демонстрационными вариантами заданий, образцами их выполнения и критериями оценки.

**Критерии оценки контрольной работы студента:**

Оценка «отлично» выставляется студенту, если:

- 1) работа выполнена полностью;
- 2) в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок;
- 3) в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала).

Оценка «хорошо» выставляется студенту, если:

- 1) работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки);
- 2) допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, или чертежах (если эти виды работы не являлись специальным объектом проверки).

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если:

допущены более одной ошибки или более двух-трех недочетов в выкладках или чертежах, но студент владеет обязательными умениями по проверяемой теме.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если:

допущены существенные ошибки, показавшие, что студент не владеет обязательными умениями по данной теме в полной мере.

Типовые варианты контрольной работы представлены в фонде оценочных средств (Приложение 2).

Итоговой формой контроля является устный экзамен, который проводится 2 раза – по результатам каждого из двух семестров. Экзаменационный билет содержит 2 теоретических вопроса и задачу.

**Критерии оценки устного ответа студентов на экзамене:**

Оценка «отлично» выставляется студенту, если:

- 1) полно раскрыто содержание учебного материала в объеме, предусмотренном программой, изложен материал грамотным языком в определенной логической последовательности, точно используя математическую терминологию и символику;
- 2) правильно выполнены рисунки и чертежи, сопутствующие ответу;
- 3) продемонстрировано умение иллюстрировать теоретические положения конкретными примерами, применять их в новой ситуации при выполнении практического задания;
- 4) продемонстрировано усвоение ранее изученных сопутствующих вопросов, сформированность и устойчивость используемых при отработке умений и навыков;
- 5) ответ самостоятельный без наводящих вопросов преподавателя. Возможны одна - две неточности при освещении второстепенных вопросов или в выкладках, которые студент легко исправил по замечанию преподавателя.

Оценка «хорошо» выставляется, если:

ответ удовлетворяет в основном требованиям на оценку «отлично», но при этом имеет один из недостатков:

- 1) в изложении допущены небольшие пробелы, не исказившие математическое содержание ответа;
- 2) допущены один-два недочета при освещении основного содержания ответа, исправленные по замечанию преподавателя;
- 3) допущены ошибка или более двух недочетов при освещении второстепенных вопросов или в выкладках, легко исправленные по замечанию преподавателя.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если:



Основная профессиональная образовательная программа  
01.03.01 Математика  
(Математика, алгоритмы и анализ данных)

1) неполно или непоследовательно раскрыто содержание учебного материала, но показано общее понимание вопроса и продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала;

2) имелись затруднения или допущены ошибки в определении понятий, использовании математической терминологии, чертежах, выкладках, исправленные после нескольких наводящих вопросов преподавателя;

3) студент не справился с применением теории в новой ситуации при выполнении практического задания, но выполнил задания обязательного уровня сложности по данной теме;

4) при знании теоретического материала выявлена недостаточная сформированность основных умений и навыков.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если:

1) не раскрыто основное содержание учебного материала;

2) обнаружено незнание или непонимание студентом большей или наиболее важной части учебного материала;

3) допущены ошибки в определении понятий, при использовании математической терминологии, в рисунках, чертежах или графиках, в выкладках, которые не исправлены после нескольких наводящих вопросов преподавателя.

#### **8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

Основная литература:

1. Винберг, Э.Б. Курс алгебры / Э.Б. Винберг. – Москва : МЦНМО, 2011. – 591 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63299>. – ISBN 978-5-94057-685-3. – Текст : электронный.

2. Кострикин, А.И. Введение в алгебру : учебник / А.И. Кострикин. - М. : МЦНМО, 2009. - Ч. 1. Основы алгебры. - 273 с. - ISBN 978-5-94057-453-8 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63140>

3. Кострикин, А.И. Введение в алгебру : учебник / А.И. Кострикин. - М. : МЦНМО, 2009. - Ч. 3. Основные структуры алгебры. - 272 с. - ISBN 978-5-94057-455-2 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=62951>

4. Сборник задач по алгебре : задачник / под ред. А.И. Кострикин. - М. : МЦНМО, 2009. - 404 с. - ISBN 978-5-94057-413-2 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63274>

5. Яцкин Н. И. Алгебра: Теоремы и алгоритмы. Учеб. пособие. Иваново: Иван. гос. ун-т, 2006.

6. Яцкин Н. И. Линейная алгебра: Теоремы и алгоритмы. Учеб. пособие. Иваново: Иван. гос. ун-т, 2008.

Дополнительная литература:

7. Кострикин А. И. Введение в алгебру. М.: Наука, 1977.- 495 с. 108 экземпляров.

8. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. 11-е изд, стереотип. – М.: Наука, 1975. 43 экземпляра.

9. Фаддеев Д. К. Сборник задач по высшей алгебре. - 11 –е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1977. – 288 с. 120 экземпляров.

10. Яцкин Н. И. Алгебра: Теоремы и алгоритмы: Учеб. пособие. Иваново: ИвГУ, 2008. – 606 с. – 98 экз.



Основная профессиональная образовательная программа  
01.03.01 Математика  
(Математика, алгоритмы и анализ данных)

---

Ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

Система электронной поддержки образовательного процесса «Мой университет»  
<https://uni.ivanovo.ac.ru>

Профессиональные базы данных и информационно-справочные системы:

ЭБС «Университетская библиотека онлайн» [www.biblioclub.ru](http://www.biblioclub.ru)

Электронная библиотека ИвГУ <http://lib.ivanovo.ac.ru>

Электронный каталог НБ ИвГУ <http://lib.ivanovo.ac.ru/index.php/ek>

Программное обеспечение: операционная система Microsoft Windows, пакет офисных программ Microsoft Office и(или) LibreOffice, интернет-браузер Microsoft Edge и(или) Yandex Browser.

## **9. Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Учебные аудитории:

- для проведения занятий лекционного типа с комплектом специализированной учебной мебели и техническими средствами обучения, служащими для предоставления учебной информации большой аудитории;

- для проведения занятий семинарского типа, консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации с комплектом специализированной учебной мебели и техническими средствами обучения;

Помещение для самостоятельной работы, оснащенное комплектом специализированной учебной мебели, компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в ЭИОС.

Демонстрационное оборудование и учебно-наглядные пособия для занятий лекционного типа, обеспечивающие тематические иллюстрации: демонстрационные устройства, электронные пособия (презентации), печатные пособия (таблицы, схемы).



Основная профессиональная образовательная программа  
01.03.01 Математика  
(Математика, алгоритмы и анализ данных)

---

**Автор рабочей программы дисциплины:** доцент кафедры фундаментальной математики, доцент кафедры фундаментальной математики, к. ф.-м.н Кононенко П.Г.

Программа рассмотрена и утверждена на заседании кафедры алгебры и математической логики

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20\_\_ г., протокол № \_\_\_\_

Программа обновлена  
протокол заседания кафедры № \_\_\_\_ от « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.  
Согласовано:  
Руководитель ОП \_\_\_\_\_  
(подпись)

Программа обновлена  
протокол заседания кафедры № \_\_\_\_ от « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.  
Согласовано:  
Руководитель ОП \_\_\_\_\_  
(подпись)

Программа обновлена  
протокол заседания кафедры № \_\_\_\_ от « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.  
Согласовано:  
Руководитель ОП \_\_\_\_\_  
(подпись)