Региональный этап

Условия, решения и схема оценивания. 9 класс

Содержание

9.1. Суточное движение звезд над горизонтом

Ю. П. Филиппов

В некоторой точке O поверхности Земли наблюдаются две звезды: A и B. Звезда A взошла в $22^{\text{h}}\,30^{\text{m}}$ местного среднего солнечного времени в 30° к северу от точки востока, а звезда B зашла за горизонт в $04^{\text{h}}\,10^{\text{m}}$ по тому же времени в 10° к югу от точки запада. Известно, что для наблюдателя, расположенного в точке O, Полярная звезда оказывается на горизонте каждые $11^{\text{h}}\,58^{\text{m}}$. Определите:

A) широту точки O;

B) склонения звезд A и B;

C) разность их прямых восхождений (с точностью до минуты);

D) отношение угловых скоростей (до сотых долей) видимого перемещения звезд по небосводу с позиции наблюдателя.

Атмосферной рефракцией следует пренебречь.

Решение. Определим широту точки O. Заметим, что промежуток времени $\tau = 11^{\text{h}}\,58^{\text{m}}$ – это 1/2 звездных суток Земли (**1 балл**). Через указанный промежуток времени Полярная звезда должна располагаться в диаметрально противоположных точках своей суточной параллели. Значит, для наблюдателя в точке O горизонт рассекает ровно по диаметру ее суточную параллель, в центре которой должен располагаться Северный полюс мира. Следовательно, последний также лежит на горизонте (**1 балл**) и его высота равна нулю. Таким образом, астрономическая широта места наблюдения также равна нулю, т. е. $\boxed{\varphi_O = 0^\circ}$ (**1 балл**), – точка наблюдения O располагалась на земном экваторе.

Для наблюдателя, расположенного на земном экваторе, ось мира лежит в плоскости математического горизонта (см. рис. 1), а плоскости небесного экватора и суточных параллелей всех звезд перпендикулярны плоскости математического горизонта (**1 балл**). При этом небесный экватор совпадает с первым вертикалом, проходящим через точки востока (E) и запада (W), а круги склонений светил, расположенных в данный момент на горизонте, совпадают с математическим горизонтом в тот же момент (**1 балл**). Значит, склонение звезды A будет равно

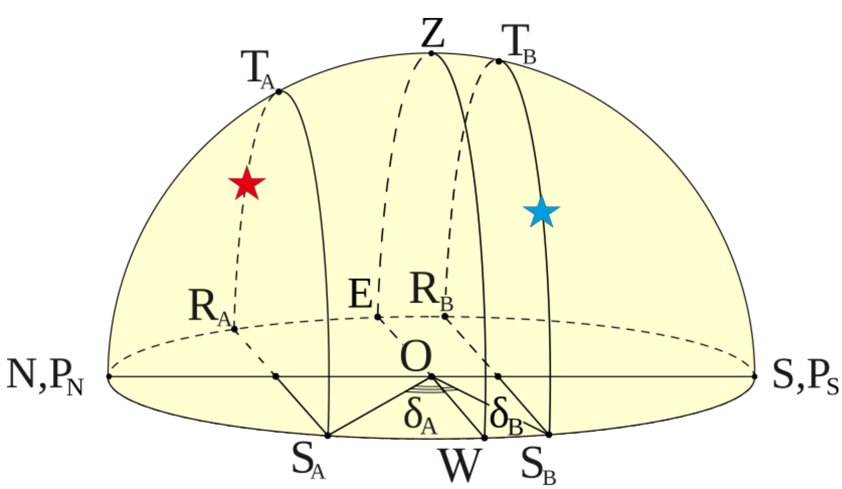


Рис. 1: К определению склонения звезд.

угловому расстоянию от точки востока до точки ее восхода, т. е. $\boxed{\delta_A = \breve{ER}_A = +30^\circ}$ (**1 балл**). Аналогично рассуждая, получаем $\boxed{\delta_B = -\breve{WS}_B = -10^\circ}$ (**1 балл**).

На экваторе все звезды находятся над горизонтом время τ. Значит, в момент восхода звезды B над горизонтом время равно $T_{\text{B}}^{(B)} = 4^{\text{h}}\,10^{\text{m}} + 24^{\text{h}} - \tau = 16^{\text{h}}\,12^{\text{m}}$ (**1 балл**). Далее воспользуемся универсальной формулой связи местного звездного времени (s), часового угла светила (t_*) и его прямого восхождения (α_*) (**1 балл**):

$$s = \alpha_* + t_*, \;\Rightarrow\; \alpha_* = s - t_*. \tag{1}$$

Тогда разность прямых восхождений звезд будет (**1+1 балл**)

$$\boxed{\Delta\alpha = \alpha_A - \alpha_B = (s_A - t_{\text{B}}) - (s_B - t_{\text{B}}) = (s_A - s_B) = k(T_{\text{B}}^{(A)} - T_{\text{B}}^{(B)}) = 6^{\text{h}}\,19^{\text{m}}}, \tag{2}$$

здесь учтено, что часовые углы точек восхода звезд A и B одинаковы; $k = 1.002739$ – коэффициент перевода интервала среднего солнечного времени в интервал звездного времени (по сути равный отношению количества звездных секунд (86400) в одних звездных сутках к количеству средних солнечных секунд (86164) в одних сутках); $T_{\text{B}}^{(A)} = 22^{\text{h}}\,30^{\text{m}}$.

Для получения этого результата можно воспользоваться немного другой последовательностью рассуждений. Звезда B заходит на $5^{\text{h}}\,40^{\text{m}}$ позже восхода звезды A (**1 балл**). За сутки солнечное и звездное время расходятся примерно на 4 минуты. Значит, за $5^{\text{h}}\,40^{\text{m}}$ разница между звездным и солнечным временем увеличится чуть менее чем на минуту (**1 балл**). Между восходом звезды A и заходом звезды B проходит, таким образом, $5^{\text{h}}\,41^{\text{m}}$ (звездное время течет быстрее) (**1 балл**). Тогда разность прямых восхождений этих звезд равна $\Delta\alpha = 12^{\text{h}} - 5^{\text{h}}\,41^{\text{m}} = 6^{\text{h}}\,19^{\text{m}}$ (**1 балл**).

Угловая скорость видимого перемещения светила по небосводу может быть определена как отношение малого угла $\Delta\xi$, на который изменяет свое положение светило на небосводе относительно наблюдателя, расположенного в центре небесной сферы, в результате суточного вращения, к промежутку времени Δt, за который это изменение произошло (**1 балл**):

$$\omega_{\text{vis}} = \frac{\Delta\xi}{\Delta t}. \tag{3}$$

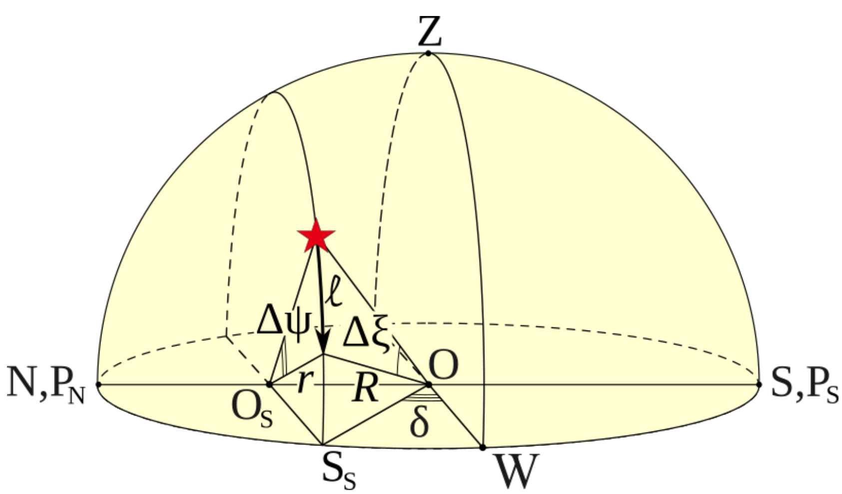


Рис. 2: К определению угловой скорости видимого перемещения звезды по небосводу.

Согласно рис. 2 угол $\Delta\xi$ можно представить в виде: $\Delta\xi = \ell/R$ (**1 балл**), здесь ℓ – малая часть дуги суточной параллели звезды, которую проходит звезда за время Δt (в силу малости дуги ℓ, последняя здесь рассматривается как дуга большого круга радиуса R, где R – радиус небесной сферы). С другой стороны, эту дугу можно представить в виде: $\ell = r\,\Delta\psi$ (**1 балл**), где r – радиус суточной параллели звезды, а $\Delta\psi = \omega_{\oplus}\Delta t$ – угол, на который повернулось светило относительно центра своей суточной параллели (O_s) за время Δt, $\omega_{\oplus}$ – угловая скорость суточного вращения Земли. Заметим, что из треугольника ΔOO_SS_S следует, что $\cos\delta_A = r/R$. Из двух последних результатов следует, что (**1 балл**)

$$\boxed{\omega_{\text{vis}} = \omega_{\oplus}\cos\delta.} \tag{4}$$

Тогда искомое отношение угловых скоростей будет (**1 балл**):

$$\boxed{\frac{\omega_{\text{vis}}^{(A)}}{\omega_{\text{vis}}^{(B)}} = \frac{\cos\delta_A}{\cos\delta_B} = 0.88}, \quad \text{или} \quad \boxed{\frac{\omega_{\text{vis}}^{(B)}}{\omega_{\text{vis}}^{(A)}} = \frac{\cos\delta_B}{\cos\delta_A} = 1.14}.$$

Критерии оценивания. **16**

После каждого критерия указывается подробная детализация для оценивания в случае неправильного ответа на вопрос. Неявное выполнение подпунктов засчитывается, если в итоге ответ на финальный вопрос правильный.

К1. Определение астрономической широты места наблюдения **3**

Использовано, что интервал $11^{\text{ч}}58^{\text{м}}$ равен 1/2 звездных суток Земли 1

Обоснование положения Северного полюса мира на горизонте 1

Определение широты точки O 1

Если широта определена правильно, но с неверным или не до конца верным обоснованием, или даже полностью без обоснования, ответы на остальные вопросы оцениваются в полной мере

К2. Определение склонений звезд A и B **4**

При неверном определении широты задача определения склонений становится совершенно иной и оценивается не более чем 2 баллами при правильном решении.

Определено взаимное расположение горизонта и небесного экватора 1

Явно указано на отсчет склонения от точек востока и запада 1

Определение значений склонения звезд A и B . . . . . . $1+1$

К3. Определение разности прямых восхождений звезд **4**

При неверном определении широты данная задача становится совершенно иной и оценивается не более чем 2 баллами при правильном решении.

Вычислено время восхода звезды B/время захода звезды A 1

Использована связь звездного времени и прямого восхождения светила 1

Итоговая формула для $\Delta\alpha$ + численное значение ($6^{\text{ч}}19^{\text{м}}$) . . . . . . $1+1$

Если участник не учел, что солнечное и звездное время течет с разной скоростью, то оценка за этот этап не может превышать 2 баллов.

К4. Определение отношения угловых скоростей **5**

Представлена формула (3) для определения угловой скорости 1

Установлена связь между углом $\Delta\xi$ и дугой ℓ 1

Представление дуги ℓ в терминах радиуса r_A и угловой скорости $\omega_{\oplus}$ 1

Получена итоговая формула (4) для угловой скорости 1

Получено численное значение искомого отношения 1

9.2. Рассеянное скопление

Е. Н. Фадеев

В рассеянном скоплении невооруженным глазом видно всего 5 звезд, причем все они 5-ой видимой звездной величины. Глядя в телескоп с диаметром объектива 120 мм, можно увидеть еще некоторое количество звезд этого скопления, причем каждая из них видна как звезда 5^m без телескопа, а от всех таких звезд приходит столько же света, как и от одной звезды 4^m. Увеличение телескопа больше равнозрачкового. Сколько звезд входит в состав скопления, если в телескоп видно все звезды? Чему равна абсолютная звездная величина всего скопления, если расстояние до него равно 150 пк?

Решение. Диаметр хорошо приспособившегося к темноте зрачка около $\delta = 6$ мм. Диаметр объектива телескопа в $120/6 = 20$ раз больше. Поскольку число собранных фотонов зависит от площади входного зрачка (**2 балла**), значит, от звезды 5^m приходит в $20^2 = 400$ раз больше квантов света. Иначе, количество собранной телескопом световой энергии также зависит от площади объектива и превосходит в 400 раз количество энергии, собираемой невооруженным глазом. В соответствии с формулой Погсона, звездная величина слабых звезд скопления составляет (**2 + 2 балла**)

$$m = 5^m + 2.5 \lg 20^2 = 5^m + 5 \lg 20 = 5^m + 5^m + 5 \lg 2 \approx 10^m + 5 \cdot 0.3 = 11.5^m. \tag{5}$$

Для того, чтобы все слабые звезды светили как одна звезда 5^m, необходимо, чтобы от них приходило в $20^2 = 400$ раз больше фотонов, чем от одной (**2 балла**). От звезды 4^m приходит в $10^{0.4} \approx 2.512$ раз больше света, чем от звезды 5^m. Следовательно, число слабых звезд скопления равно $400 \cdot 2.512 \approx 1005$ (**2 балла**), а полное число звезд скопления равно $N = 1010$ (**1 балл**).

Пусть x — освещенность, создаваемая звездой 5^m. Тогда все скопление создает освещенность $5x + 2.512x = 7.512x$. Видимая звездная величина всего скопления равна (**2 балла**)

$$m_\Sigma = 5^m - 2.5 \lg \frac{7.512x}{x} \approx 2.8^m. \tag{6}$$

Тогда абсолютная звездная величина скопления (**1+2 балла**)

$$M = m_\Sigma + 5 - 5 \lg l = 2.8 + 5 - 5 \lg 150 \approx -3.1^m. \tag{7}$$

Замечание 1. Размер зрачка глаза в темноте у разных людей может колебаться от 4 до 8 мм. В решении использовался средний размер зрачка 6 мм. При иных значениях ответ на первый вопрос будет иным. Для удобства сведем эти значения в таблицу.

δ, мм	4	5	6	7	8
m	12.3	11.9	11.5	11.2	10.9
N	2266	1452	1010	743	570

Замечание 2. Число звезд скопления можно найти другим способом. Освещенность от звезды 4^m больше, чем от звезды 11.5^m в $10^{0.4(11.5-4)} = 1000$ раз. Значит скопление содержит $1000 + 5$ звезд. Ответ отличается от приведенного выше, но противоречие только кажущееся. Надо учесть, что в формуле (5) мы округлили значение m. Возникает такой же эффект, как

и при измерении больших расстояний маленькой линейкой: абсолютная погрешность растет. Если мы подставим неокругленное (или округленное до большего числа знаков) значение m, то получим правильный ответ $N = 1005 + 5$ звезд. Поэтому ответ $1000 + 5$ звезд является неправильным.

Критерии оценивания. **16**

После каждого критерия указывается подробная детализация для оценивания в случае неправильного ответа на вопрос. Неявное выполнение подпунктов засчитывается, если в итоге ответ на финальный вопрос правильный.

К1. Определена визуальная звездная величина звезд видимых только в телескоп **6**

Записана формула Погсона в любом из вариантов 2

Освещенность зависит от площади или квадрата диаметра входного зрачка 2

Правильное значение звездной величины 2

Если в качестве диаметра зрачка выбирается величина не из диапазона $[4; 8]$, то оценка уменьшается на 1 балл

В случае ошибки на любом из предыдущих этапов вычисление звездной величины не оценивается

К2. Полное количество звезд в скоплении **5**

Есть указание на суммирование освещенностей (света, энергии, фотонов) 2

Определено количество звезд, видимых только в телескоп 2

Если допущена ошибка, описанная в замечании 2, оценка уменьшается на 1 балл

Полное количество звезд в скоплении 1

К3. Абсолютная звездная величина скопления **5**

Определена суммарная визуальная звездная величина всего скопления 2

Если учтены не все звезды, оценка уменьшается на 1 балл

Зависимость освещенности от обратного квадрата расстояния (явно или косвенно) 1

Правильное значение звездной величины 2

В случае ошибки на любом из предыдущих этапов вычисление звездной величины не оценивается

9.3. Далекие перспективы

А. Ф. Шишкина

В одном романе описано, что ученые создали в Солнечной системе искусственную планету X со следующими характеристиками:

1) если с планеты X зарисовать взаимное расположение Земли, Солнца и X в данный момент и ровно через местный год, то картины совпадут;

2) каждый раз, когда с Земли наблюдается противостояние планеты X, с планеты X наблюдается противостояние одной и той же планеты Солнечной Системы.

Насколько далеко от Солнца могла бы находиться планета X? Орбиты всех планет считать круговыми и лежащими в одной плоскости.

Решение. Поскольку планета X может наблюдаться с Земли в противостоянии, то можно сделать однозначный вывод, что она внешняя (**1 балл**), причем планета Солнечной Системы, о которой идет речь во втором вопросе, внешняя по отношению к планете X (**1 балл**). Таким образом, это может быть Марс, Юпитер, Сатурн, Уран или Нептун. Так как дальнейшие размышления будут для любой из этих планет аналогичными, будем называть ее планета СС и использовать индекс «с» в формулах.

Из условия можно сделать вывод, что орбита планеты X может располагаться между орбитами Земли и планеты СС. Также планета X не может вращаться вокруг Солнца в противоположную относительно планеты СС сторону, поскольку в таком случае не будет выполняться второе условие. Действительно, поскольку планета X внешняя, то ее сидерический период больше сидерического периода Земли. Предположим, что в некоторый момент с Земли наблюдалось одновременно противостояние планет СС и X. Тогда следующее противостояние X состоится не ранее, чем через полгода, и не позже чем через год, тогда как синодический период планеты СС больше года (**2 балла**).

Из первой части условия можно сделать вывод, что период обращения планеты X ($T_{\text{х}}$) в некоторое целое число раз n больше сидерического периода Земли ($T_{\text{з}}$). Поэтому (**2 балла**):

$$T_{\text{х}} = nT_{\text{з}}. \tag{8}$$

Из второй части условия следует подобная связь между синодическими периодами систем «Земля —Планета X» ($S_{\text{зх}}$) и «Планета X — Планета СС» ($S_{\text{хс}}$) (**2 балла**):

$$S_{\text{зх}} = kS_{\text{хс}}, \tag{9}$$

где k – целое положительное число. Запишем связь между синодическими и сидерическими периодами (**3 балла**):

$$\frac{1}{S_{\mathbf{зх}}} = \frac{1}{T_{\text{з}}} - \frac{1}{T_{\text{х}}}; \quad \frac{1}{S_{\mathbf{хс}}} = \frac{1}{T_{\text{х}}} - \frac{1}{T_{\text{с}}}. \tag{10}$$

Здесь $T_{\text{с}}$ — сидерический период рассматриваемой планеты СС. Подставив $T_{\text{х}}$ и $S_{\text{зх}}$ из уравнений (8) и (9), получим

$$\frac{1}{kS_{\mathbf{хс}}} = \frac{1}{T_{\text{з}}} - \frac{1}{nT_{\text{з}}}; \quad \frac{1}{S_{\mathbf{хс}}} = \frac{1}{nT_{\text{з}}} - \frac{1}{T_{\text{с}}}. \tag{11}$$

Поделим второе уравнение на первое

$$\frac{kS_{\text{хс}}}{S_{\text{хс}}} = \frac{T_{\text{з}} n T_{\text{з}}}{nT_{\text{з}} - T_{\text{з}}} \cdot \frac{T_{\text{с}} - nT_{\text{з}}}{T_{\text{с}} n T_{\text{з}}} = \frac{T_{\text{з}}}{T_{\text{с}}} \cdot \frac{\frac{T_{\text{с}}}{T_{\text{з}}} - n}{n-1}. \tag{12}$$

Период планеты СС в земных сидерических периодах обозначим как $P_{\text{с}}$. Тогда (**3 балла**)

$$k = \frac{P_{\text{с}} - n}{P_{\text{с}}(n-1)} \geqslant 1. \tag{13}$$

Отсюда

$$n \leqslant \frac{2P_{\text{с}}}{P_{\text{с}} + 1}. \tag{14}$$

При $n = 1$ получаем $P_{\text{с}} = 1$, то есть сидерический период планеты равен земному году, чего быть не может. При любом значении $P_{\text{с}} > 1$ значение дроби в правой части остается меньше 2, а значит, других целых решений этого неравенства не существует ни для одной из внешних по отношению к Земле планет Солнечной Системы.

Итак, мы получили противоречие. Автор романа ошибся: ученые создать такую планету не могли. Поэтому она не могла находиться ни на каком расстоянии от Земли (**2 балла**).

Критерии оценивания. **16**

После каждого критерия указывается подробная детализация для оценивания в случае неправильного ответа на вопрос. Неявное выполнение подпунктов засчитывается, если в итоге ответ на финальный вопрос правильный.

К1. Определение положения планеты X в солнечной системе **2**

X — внешняя для Земли 1

X — внутренняя для планеты Солнечной системы 1

Данные утверждения не обязательно должны быть сделаны явно. Они могут быть понятны из логики решения.

К2. Исследование прямого движения **11**

Верная связь между $T_{\text{х}}$ и $T_{\text{з}}$ 2

Если вместо произвольного натурального n рассмотрен только один вариант, оценка уменьшается на 1 балл.

Верная связь между $S_{\text{зх}}$ и $S_{\text{хс}}$ 2

Если вместо произвольного натурального k рассмотрен только один вариант, оценка уменьшается на 1 балл.

Верно записаны уравнения (10) 2

Условие, из которого можно сделать вывод об отсутствии подходящих орбит 3

Вывод об отсутствии подходящих орбит для этого типа движения 2

К3. Рассмотрен вариант обратного движения X и сделан правильный вывод **2**

К4. Окончательный ответ, что планета X не могла находиться в Солнечной системе **1**

Оценивается, только если верно рассмотрены и прямое, и обратное движения.

9.4. Рыбак рыбака

Е. Н. Фадеев

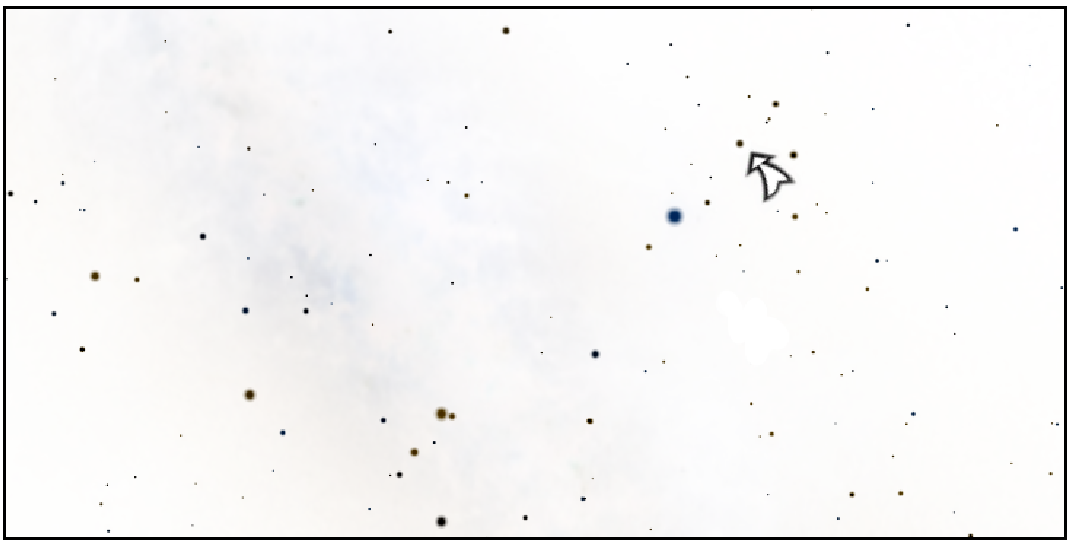
Инопланетные астрономы, живущие на планете, обращающейся вокруг нормальной звезды, обнаружили, что некоторая желтая звезда (нам известная как Солнце) за местный год, равный 5 земным суткам, совершает на небе движение по эллипсу с величиной большой полуоси $7.7 \cdot 10^{-3}$ угловой секунды относительно звезд фона. На звездной карте инопланетных астрономов отмечено положение исследуемой звезды. Учитывая, что свет от этой звезды достигает астрономов за 833 местных года, определите:

A) Массу звезды, вокруг которой вращается планета астрономов в массах Солнца.

B) Созвездие, в котором находится эта звезда для наблюдателей на Земле.

C) Можно ли увидеть эту звезду с Земли невооруженным глазом?

D) Как мы называем самую яркую звезду, расположенную на карте недалеко от Солнца?



К условию задачи 4

Решение. Определим расстояние от инопланетян до Солнца. Местный год в $\frac{5}{365.25}$ раз короче земного. Поэтому искомое расстояние составляет (**2 балла**)

$$l = \frac{5}{365.25} 833 \approx 11.4\,\text{св. лет} \approx 3.5\,\text{пк}. \tag{15}$$

Смещение Солнца на небе инопланетян вызвано явлением параллакса. Под углом $\varpi = 7.7 \cdot 10^{-3}{}''$ нам видно радиус орбиты планеты r. Тогда (**2 балла**)

$$r = l\varpi = 3.5 \cdot 7.7 \cdot 10^{-3} \approx 0.027\,\text{а. е.} \tag{16}$$

Пусть M — масса звезды инопланетян. В соответствии с обобщенным третьим законом Кеплера (**2 балла**)

$$\frac{M}{M_\odot} = \left(\frac{r}{r_\oplus}\right)^3 \left(\frac{P_\oplus}{P}\right)^2, \tag{17}$$

где $r_\oplus$ и $P_\oplus$ — радиус орбиты и период обращения Земли вокруг Солнца, а $M_\odot$ — масса Солнца. Подставляя значения, получаем (**2 балла**)

$$M = 0.027^3 \left(\frac{365.25}{5}\right)^2 \approx 0.1 M_\odot. \tag{18}$$

На карте мы видим Солнце среди звезд созвездия Скорпион (**1 балл**). Самая яркая звезда в этом созвездии называется Антарес (**2 балла**). Можно заметить, что Солнце располагается почти точно на эклиптике. Планету инопланетян нам нужно искать в противоположной части неба, то есть в созвездии Тельца (**2 балла**).

Масса звезды соответствует массе небольшого красного карлика. Ближайший к нам красный карлик Проксима Центавра невооруженным глазом не виден. Звезда инопланетян находится примерно втрое дальше, а значит, также не должна быть видна невооруженным глазом (**3 балла**).

Замечание. Вывод о невидимости глазом звезды инопланетян сделан на основе общеизвестной информации. Это не единственный способ рассуждений. Приведем некоторые другие.

- Типичный блеск ближайших к нам красных карликов 9–10^{m}. Нами получена масса очень небольшого красного карлика, а значит, он точно не относится к ярким представителям своего класса и не будет видим глазом.
- Температуры красных карликов составляют около 3000 K. Поскольку светимость звезды пропорциональна четвертой степени температуры, звезда, размером с Солнце и такой температурой, светила бы в 16 раз слабее. Солнце с расстояния 10 пк видно как звезда 4.7^{m}. Тогда с расстояния 3.5 пк оно было бы видно как звезда $4.7 - 5 + 5\lg 3.5 \approx 2.4^{\mathrm{m}}$, а в два раза более холодное Солнце имело бы звездную величину $2.4 + 2.5\lg 16 \approx 5.4^{\mathrm{m}}$. Такую звезду увидеть на темном небе можно, но надо учесть, что красные карлики меньше Солнца, а такие маломассивные, как в нашем случае, скорее ближе по размерам к Юпитеру. Отсюда делаем вывод о том, что блеск звезды слишком мал.
- Для звезд главной последовательности с массами не слишком сильно отличающимися от солнечной известна зависимость масса-светимость: $L \propto M^4$. Отсюда можно сделать вывод, что светимость звезды составляет около 0.0001 светимости Солнца. Тогда, рассуждая изложенным выше путем, получим, что блеск звезды составляет 12.4^{m}. В действительности зависимость масса светимость для красных карликов менее крутая, но сути выводов это не меняет.

На самом деле даже самый яркий красный карлик невооруженным глазом невиден, или виден далеко не каждым невооруженным глазом, поскольку его звездная величина 6.7^{m}.

Критерии оценивания. **16**

После каждого критерия указывается подробная детализация для оценивания в случае неправильного ответа на вопрос. Неявное выполнение подпунктов засчитывается, если в итоге ответ на финальный вопрос правильный.

К1. Определение массы звезды **8**

Определение расстояния от звезды до Солнца 2

Определение радиуса орбиты планеты инопланетян 2

Правильная запись 3-го обобщенного закона Кеплера 2

Вычисление массы звезды 2

Если масса определена не в нужных единицах, то оценка за последний пункт уменьшается на 1 балл

В случае ошибки на любом из предыдущих этапов, последний этап не засчитывается

К2. Определение созвездия **3**

Правильное отождествление созвездия на карте 1

Созвездие Тельца 2

Если вместо Тельца указано созвездие Овна, то за последний пункт ставится 1 балл при правильных рассуждениях

К3. Вывод невидимости звезды глазом **3**

Если масса звезды определена с ошибкой, то вывод о видимости звезды глазом оценивается из полученного значения массы

К4. Антарес **2**

9.5. Два спутника

Е. Н. Фадеев

Два спутника Земли — «Метеор» и «Облако» — движутся по круговым орбитам в перпендикулярных плоскостях. В некоторый момент времени «Метеор» пролетел над «Облаком». Спустя четверть оборота «Метеор» мог видеть «Облако» на краю диска Земли. Угловой диаметр Земли при наблюдении с «Облака» равен $\beta = 93°$.

A) На каком угловом расстоянии от края диска Земли будет видно «Облако» с «Метеора» через половину периода «Метеора» после пролета одного спутника над другим?

B) Сколько полных оборотов совершит «Метеор», прежде чем, вернувшись в исходную точку, он не сможет увидеть «Облако»?

Атмосферной рефракцией пренебречь.

Решение. На рисунке изобразим момент, когда «Метеор» видит «Облако» на краю диска Земли. Пусть $R = 6371$ км — радиус Земли, а $r_{\rm M}$ и $r_{\rm O}$ — радиусы орбит «Метеора» и «Облака» соответственно.

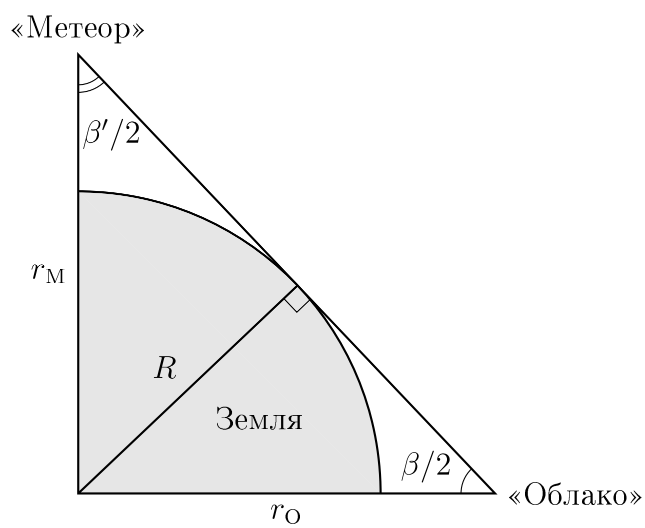


Рис. 4: К определению радиусов орбит спутников.

Из рисунка видно, что радиус орбиты «Облака» равен (**2 балла**)

$$r_{\rm O} = \frac{R}{\sin\frac{\beta}{2}} \approx 8783\,\text{км}. \tag{19}$$

Стоит отметить, что угол $\beta/2 = 46.5° \approx 0.8$ рад довольно велик и замена синуса этого угла на сам этот угол в радианах неправомочна (замена справедлива, пока угол много меньше радиана) и приводит к значительной ошибке.

Радиус орбиты «Метеора» равен (**2 балла**)

$$r_{\rm M} = r_{\rm O}\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2} = \frac{R}{\cos\frac{\beta}{2}} \approx 9255\,\text{км}. \tag{20}$$

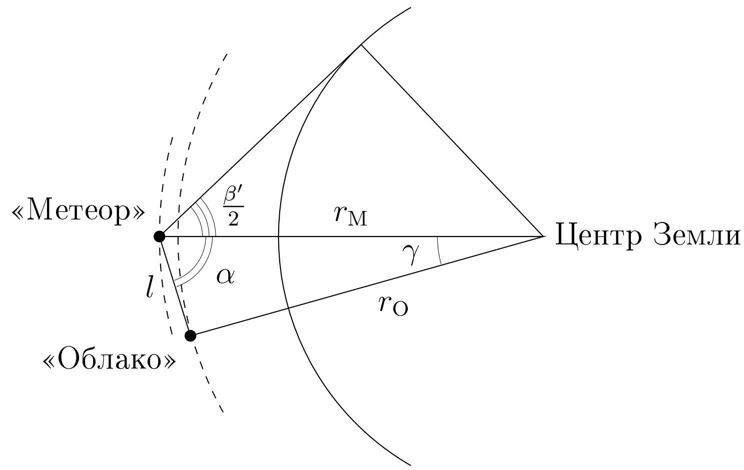


Рис. 5: Положение спутников после половины оборота «Метеора».

Зная радиусы орбит спутников, можем найти отношение их периодов обращения с помощью 3-го закона Кеплера (**1+1 балла**):

$$\frac{P_\text{M}}{P_\text{O}} = \left(\frac{r_\text{M}}{r_\text{O}}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \approx 1.082. \tag{21}$$

Спустя половину оборота «Метеор» окажется в точке своей орбиты противоположной исходной. «Облако» к этому моменту пройдет половину своей орбиты и еще некоторый угол $\gamma = (P_\text{M}/P_0 - 1) \times 180° \approx 15°$ (**1 балл**). Мы получили угол «Облако»–центр Земли–«Метеор», а для ответа на первый вопрос нам нужно знать угол «Облако»–«Метеор»–центр Земли. Обозначим его как α. Его можно найти с помощью теоремы синусов, если знать расстояние между спутниками l. Это расстояние можно найти с помощью теоремы косинусов (**2 балла**):

$$l = \sqrt{r_\text{O}^2 + r_\text{M}^2 - 2r_\text{O}r_\text{M}\cos\gamma} \approx 2355\,\text{км}. \tag{22}$$

Отсюда (**2 балла**)

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{r_\text{O}}{l}\sin\gamma\right) \approx 71.2°. \tag{23}$$

Видимый с «Метеора» угловой радиус Земли равен $\beta'/2 = 90° - \beta/2 = 43.5°$. Тогда искомый угол между «Облаком» и краем диска Земли (**1 балл**)

$$\delta = \alpha - \beta'/2 = 27.7°. \tag{24}$$

В исходной точке «Облако» останется видимым с «Метеора», пока не обгонит его на угол больший 90°. После каждого витка он опережает «Метеор» на угол 2γ. Разделив 90° на 2γ, получаем чуть больше 3. Это означает, что «Метеор» не сможет увидеть «Облако» только после того, как вернется в точку A в четвертый раз (**3 балла**).

Ответ на последний вопрос можно получить немного иначе. Выразим синодический период «Облака» для «Метеора» S через периоды обращения этих спутников P_O и P_M:

$$S = \frac{P_\text{M}P_\text{O}}{P_\text{M} - P_\text{O}} = \frac{P_\text{O}}{P_\text{M}}\frac{P_\text{M}}{1 - \frac{P_\text{O}}{P_\text{M}}} \approx 12.2P_\text{M}. \tag{25}$$

За синодический период «Облако» обгонит «Метеор» на один оборот. Значит, обгон на четверть оборота состоится за четверть синодического периода, то есть $3.1P_{\text{М}}$. Мы снова пришли к тому же выводу.

Критерии оценивания. **16**

После каждого критерия указывается подробная детализация для оценивания в случае неправильного ответа на вопрос. Неявное выполнение подпунктов засчитывается, если в итоге ответ на финальный вопрос правильный.

К1. Определены радиусы орбит либо высоты спутников над поверхностью Земли **3**

Правильный метод вычисления 1

В частности, если вместо синуса угла в формулах (19) и (20) используется сам угол, то этот балл не выставляется, но остальное решение оценивается полностью

Значение для «Облака» 1

Значение для «Метеора» 1

Вычисление обоих значений оценивается только если сам метод вычисления был верным

К2. Отношение периодов спутников **3**

Запись 3 закона Кеплера 2

Вычисление отношения периодов 1

Засчитывается только при правильной формуле

К3. Определено угловое расстояние от «Облака» до края диска Земли **6**

Угол между спутниками при центре Земли 1

Линейное расстояние между спутниками 2

Угол «Облако»–«Метеор»–центр Земли 2

Расчет углового расстояния 1

К4. Ответ на второй вопрос **4**

Явно указаны 90 градусов или четверть оборота 1

Верно определено количество витков любым разумным способом 3

За каждый недостающий/лишний в ответе виток оценка за последний пункт снижается на 1 балл

9.6. Галактический пролет

В. Б. Игнатьев

В плоскости Галактики вдали от тяготеющих тел двигаются две звезды S_1 и S_2. Можно считать, что звезды двигаются равномерно и прямолинейно, гравитационным влиянием друг на друга можно пренебречь. Длина вектора скорости показывает расстояние, пройденное звездой за 10 000 лет. Определите следующие величины:

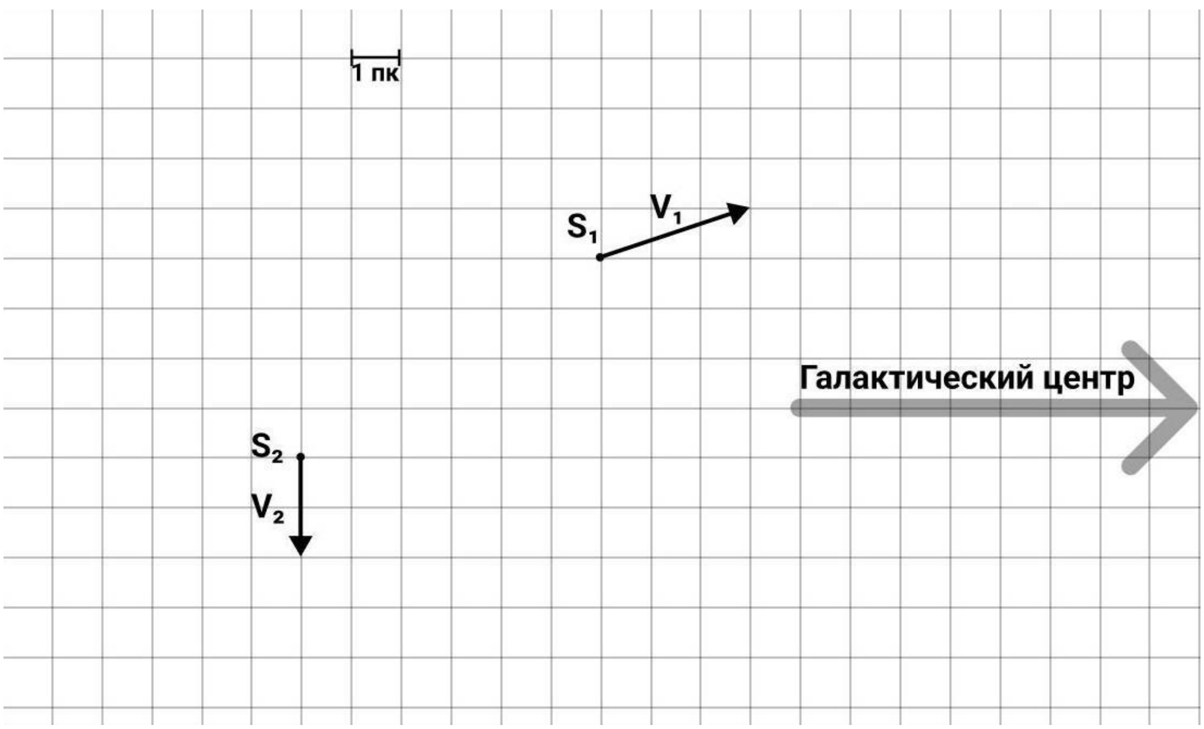
A) Минимально возможное расстояние между двумя звездами в парсеках.

B) Через какое время в прошлом или в будущем это произойдет? Ответ дайте в годах.

C) Относительную скорость звезды S_1 для наблюдателя из окрестностей звезды S_2 в километрах в секунду.

D) Собственное движение звезды S_1 со звезды S_2 в начальный момент времени и в момент минимального пролета, выраженное в угловых секундах в год.

На рисунке изображен вид из северного полюса Галактики.



К условию задачи 6

Решение. Перейдем в систему отсчета одной из звезд. Поскольку нас спрашивают про звезду S_1 со звезды S_2, то для решения задачи разумно перейти в систему отсчета S_2.

В этой системе отсчета найдем вектор относительной скорости звезды S_1. Для этого к концу вектора v_1 приложим вектор $-v_2$. Длина получившегося вектора равна $v_{\text{OTH}} = 3\sqrt{2}$ (**2 балла**), то есть за 10 000 лет звезда преодолела $3\sqrt{2}$ пк. Тогда относительная скорость равна (**2+2 балла**)

$$v_{\text{OTH}} = \frac{\sqrt{2} \cdot 3 \text{ пк}}{10\ 000 \text{ лет}} = \frac{\sqrt{2} \cdot 3 \cdot 3.086 \cdot 10^{13} \text{ км}}{10\ 000 \cdot 3.15 \cdot 10^{7} \text{ с}} = 416 \text{ км/с} \qquad (26)$$

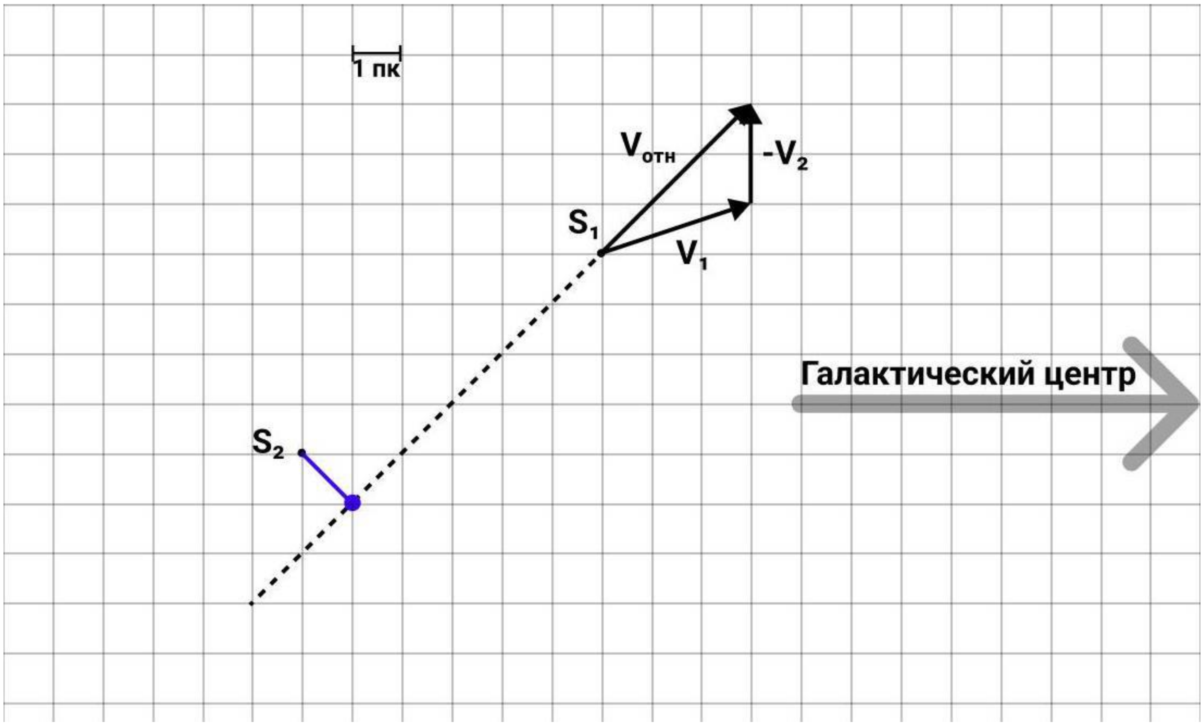


Рис. 7: Определение относительной скорости и минимального расстояния

Тем самым мы получили ответ на **третий вопрос** задачи.

Обратим внимание, что звезда S_1 сейчас удаляется от S_2. Значит, пролет на минимальном расстоянии был в прошлом (**1 балл**). Нарисуем штриховой линией путь звезды S_1 в нашей системе отсчета. Перпендикуляр к этой штрихованной линии будет являться как раз минимальным расстоянием. Из чертежа видно, что минимальное расстояние составляет $r_{\min} = \sqrt{2} = 1.4$ пк (**2 балла**). А время, когда было это событие, равно (**3 балла**)

$$\Delta t = \frac{5}{3} \cdot 10\ 000 \text{ лет} \approx 16\ 700 \text{ лет назад.} \tag{27}$$

Альтернативный вариант решения может быть следующим. Участник может составить уравнение движения каждой из звезд, найти зависимость расстояния от времени и искать время (при помощи производной или иным способом), при котором расстояние становится минимальным.

На этом заканчивается первая часть задачи, и мы переходим к более астрономическому **четвертому** вопросу. Трансверсальная (часто говорят тангенциальная) скорость звезды может быть вычислена с помощью формулы (**1 балл**)

$$v_\tau = 4.74 \frac{\mu''/\text{год}}{\pi''} \text{ км/с,} \tag{28}$$

где численный коэффициент 4.74 получается от деления значения одной астрономической единицы на число секунд в году, μ – собственное движение звезды (или угловая скорость), которое астрономы измеряют в угловых секундах в год.

Сначала рассмотрим момент, когда звезда находилась на минимальном расстоянии. В этом случае относительная скорость равна трансверсальной (**1 балл**), а лучевая скорость равна нулю. Расстояние равно минимальному расстоянию $\sqrt{2}$ пк. Подставив значения в формулу (28), получим (**1 балл**)

$$\mu_{min} = \frac{v_\tau \pi''}{4.74} = \frac{v_\tau}{4.74 \cdot r\ (\text{пк})} = \frac{416}{4.74 \cdot \sqrt{2}} = 62''/\text{год}. \tag{29}$$

Теперь перейдем к начальному моменту времени. Для этого случая рассмотрим два различных подхода, чтобы показать возможные решения участников.

Вариант 1. В лоб.

Обозначим угол между вектором $\vec{v}_{\text{отн}}$ и лучом зрения как γ. Тогда искомая тангенциальная скорость равна $v_\tau = v_{\text{отн}} \sin\gamma$ (**2 балла**). Обозначим положение звезды S_1 на минимальном расстоянии от звезды S_2 как $S_{1(min)}$. Треугольник $\triangle S_1 S_2 S_{1(min)}$ прямоугольный, а угол при вершине S_1 равен γ. Длины обоих катетов этого треугольника мы нашли ранее. Тогда расстояние между звездами – гипотенузу треугольника – можно найти из теоремы Пифагора: $S_1S_2 = r_0 = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (5\sqrt{2})^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ пк (**2 балла**). К такому же ответу мы придем, если построим прямоугольный треугольник с гипотенузой r_0 и катетами, проведенными по линиям сетки на рисунке: $r_0 = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52}$. Тогда $\sin\gamma = r_{min}/r_0 = 1/\sqrt{26}$.

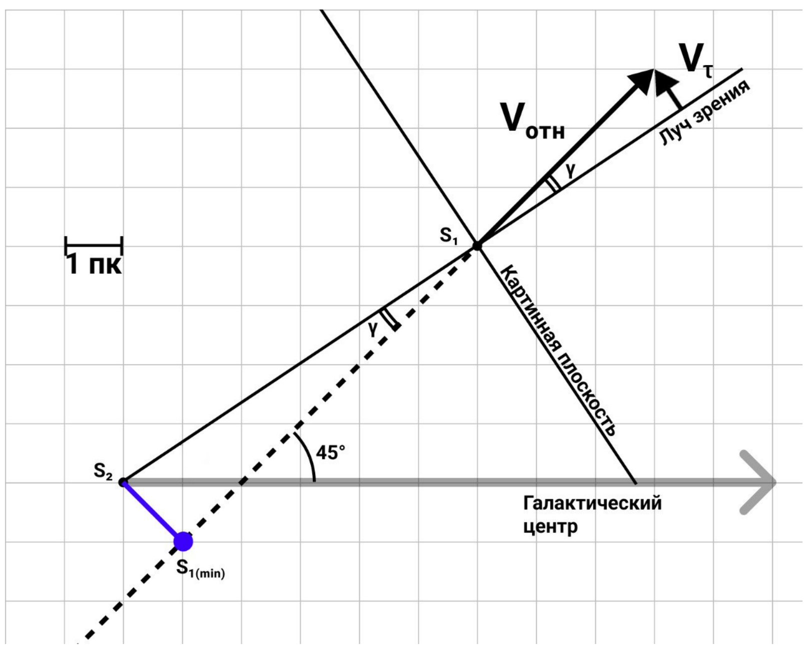


Рис. 8: Определение трансверсальной скорости

Подставим полученные значения в формулу для собственного движения (**1 балл**):

$$\mu_0 = \frac{v_\tau}{4.74 \cdot r_0} = \frac{v_{\text{отн}} \sin\gamma}{4.74 \cdot r_0} = \frac{416\,\text{км/с}}{4.74 \cdot \sqrt{26} \cdot 2\sqrt{13}} = \frac{416}{4.74 \cdot 26\sqrt{2}} \approx 2.4''/\text{год}. \tag{30}$$

Вариант 2. С использованием прицельного параметра

Минимальное расстояние r_{min} иногда называют прицельным параметром. Как мы уже показали в первом варианте, можно записать:

$$\begin{cases} v_\tau = v_{\text{отн}} \sin\gamma \\ r_{\min} = r_0 \sin\gamma \end{cases} \tag{31}$$

Отсюда, исключая $\sin\gamma$, получаем

$$\frac{v_\tau}{v_{\text{отн}}} = \frac{r_{\min}}{r_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{v_\tau}{v_{\text{отн}} \cdot r_0} = \frac{r_{\min}}{r_0^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{v_\tau}{v_{\text{отн}} \cdot r_0} = \frac{r_{\min}^2}{r_{\min} \cdot r_0^2} \tag{32}$$

Тогда

$$\frac{v_\tau}{r_0} = \frac{v_{\text{отн}}}{r_{\min}} \cdot \frac{r_{\min}^2}{r_0^2} \tag{33}$$

Подставляя в формулу (28) и учитывая выражение (29), получим

$$\mu_0 = \frac{v_\tau}{4.74 \cdot r_0} = \mu_{min} \cdot \frac{r_{\min}^2}{r_0^2} = 62 \cdot \frac{2}{52} = 2.4''/\text{год}. \tag{34}$$

Критерии оценивания. **20**

После каждого критерия указывается подробная детализация для оценивания в случае неправильного ответа на вопрос. Неявное выполнение подпунктов засчитывается, если в итоге ответ на финальный вопрос правильный.

К1. Определение минимального расстояния **4**

Построение вектора относительной скорости 2

Верный численный ответ в парсеках 2

Если верный ответ дан не в парсеках, то вместо 2-х баллов ставится только 1

Этот пункт ставится только за верный ответ. В случае получения неверного ответа критерий 1 не оценивается, а все последующие пункты оцениваются в зависимости от численных значений в решении участника.

К2. Определение времени, когда было минимальное расстояние между звездами **4**

Утверждение, что это было в прошлом 1

Определение величины Δt с точностью до 500 лет 3

К3. Определение относительной скорости **4**

Построение вектора относительной скорости в терминах условия задачи оценивается в первом критерии

Определение относительной скорости в терминах условия задачи (пк/год) 2

Верный численный ответ в км/с 2

К4. Определение собственных движений **8**

Запись формулы для собственного движения 1

Определение трансверсальной скорости для наименьшего расстояния 1

Определение трансверсальной скорости в начальный момент 2

Определение взаимного расстояния в начальный момент 2

Определение собственного движения для наименьшего расстояния 1

Определение собственного движения в начальный момент 1