Разбор решения задач муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2023-2024 учебном году

7 класс

Общие критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

1. Учащимся класса, состоящего из 35 человек, предложили участвовать в соревнованиях по бегу и прыжкам. 23 учащихся не прыгали, а 30 участвовали хотя бы в одном виде соревнований. Сколько человек участвовали только в соревнованиях по бегу?

Решение. Так как 30 человек участвовали хотя бы в одном виде соревнований, то 5 человек не участвовали в соревнованиях совсем. Эти 5 человек находятся среди 23 учащихся, которые не прыгали. Значит, 18 человек только бегали.

Критерии проверки

Содержание критерия	**Баллы**
Полное обоснованное решение, верный ответ	7 баллов
Обоснованное решение, ответ неверный из-за арифметической ошибки	6 баллов
Найдено количество человек, которые не бегали и не прыгали	3 балла
Только ответ без объяснений	0 баллов

2. Барон Мюнхгаузен утверждает, что знает 2023 числа, которые можно записать в строчку так, что сумма любых трех соседних чисел положительна, а сумма любых пяти соседних отрицательна. Можно ли ему верить?

Решение. Нет. Рассмотрим первые 15 чисел. Разобьем их на пять троек, сумма в каждой тройке положительна, значит, сумма всех 15-ти чисел положительна. Разобьем эти 15 чисел на 3 пятерки, сумма каждой пятерки отрицательна, значит, сумма всех 15 чисел отрицательна. Противоречие.

Критерии проверки

Содержание критерия	**Баллы**
Полное обоснованное решение, верный ответ	7 баллов
Только ответ без объяснений	0 баллов

3. На шести карточках написаны цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6. Сколько существует шестизначных чисел $\overline{abcdef}$ таких, что $\overline{ab}$делится на 2, $\overline{abc}$ делится на 3, $\overline{abcd}$ делится на 4, $\overline{abcde}$ делится на 5, $\overline{abcdef}$ делится на 6 ?

Решение. Заметим, что цифры b,d,f – четные, e = 5. $\overline{abcd}$ делится на 4, значит $\overline{cd}$ делится на 4 и c – нечетная. Возможны случаи: 12, 16, 32, 36. Число $\overline{abc}$ делится на 3, c равно 1 или 3, тогда a+b при делении на 3 дает остаток либо 2, либо 0.

Разберем каждый случай

$\overline{cd}$	(a+b) mod 3	$\overline{abcde}$	$\overline{abcdef}$
12	2	нет	нет
16	2	32165	321654
32	0	нет	нет
36	0	12365	123654

Ответ: 321654, 123654

Критерии проверки

Содержание критерия	**Баллы**
Полное обоснованное решение, верный ответ	7 баллов
За каждый найденный пример по 2 балла	
Если указано, что $\overline{cd}$ принимает только четыре значения 12,16,32,36	2 балла

4. В коробке лежат красные и синие кубики. Саша вынул один кубик, затем заглянул в коробку и сказал: «5/7 оставшихся кубиков – синие», после чего положил кубик обратно в коробку. Затем один кубик вынул Ваня, заглянул в коробку и сказал: «2/3 оставшихся кубиков – синие». Сколько кубиков было в коробке первоначально ?

Решение. Раз доли, названные ребятами, различны, то ребята вытаскивали кубики разных цветов. При этом 5/7 > 2/3, то Саша вынул синий кубик, а Ваня – синий. Пусть красных кубиков x, синих - y. Тогда

$$\frac{y}{x+y-1}=\frac{5}{7},\ \frac{y-1}{x+y-1}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{y}{x+y-1}-\frac{y-1}{x+y-1}=\frac{5}{7}-\frac{2}{3}=\frac{1}{21}$$

$$\frac{1}{x+y-1} = \frac{1}{21}$$

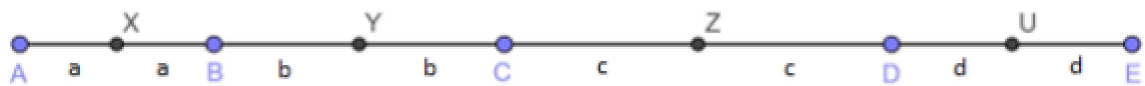
$$x+y = 22$$

Ответ: 22

Критерии проверки

Содержание критерия	**Баллы**
Полное обоснованное решение, верный ответ	7 баллов
Приведено обоснованное решение, но в ответе 21	6 баллов
Приведен пример: синих – 15, красных - 7	3 балла
Только ответ – 22	0 баллов

5. Отрезок, длина которого 100 см разделен на четыре неравных отрезка. Расстояние между серединами самого левого и самого правого отрезков равна 64. Найдите расстояние между серединами средних отрезков.
Решение. Пусть AB, BC, CD, DE – четыре неравных отрезка, X,Y,Z,U – соответственно середины этих отрезков. Пусть длины половинок этих отрезков равны соответственно a, b, c, d (см. рис.)



Тогда XU = 64 = a + 2b + 2c + d, AX + UE = 100 - 64 = 36 = a+d. 2b + 2c = 64 – 36 = 28,b + c = 14 = XZ

Ответ: 14 см

Критерии проверки

Содержание критерия	**Баллы**
Полное обоснованное решение, верный ответ	7 баллов
Только ответ – 14	0 баллов

Спасибо за внимание!

Разбор решения задач муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2023-2024 учебном году

8 класс

Общие критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

1. Петя изготовил 11 палочек длиной 1, 2, 3, …,10, 11 см и поставил их в каком-то порядке друг за другом в линию. Оказалось, что если смотреть слева, то видно n палочек, а если справа, то m палочек. Какое наименьшее и какое наибольшее значение может принимать n+m ?

Решение. Заметим, что n или m может равняться 1, если самая длинная палочка стоит первой (или последней) и закрывает все остальные палочки. Поскольку самая высокая палочка одновременно не может быть первой и последней, то $n+m \geq 1+2=3$. Таким образом, минимальное значение n+m не меньше 3. В случае, когда самая длинная палочка стоит первой, а вторая по длине палочка последней, этот минимум достигается.

С другой стороны, только одна палочка может быть видима с двух сторон – самая длинная, остальные палочки видны только с одной стороны. Тогда $n+m \leq 10 + 2 = 11$. Для достижения максимума поставим палочки по возрастанию.

Ответ: 3 и 12

Критерий проверки

Баллы **складываются** из двух частей: первая часть – нахождение минимума – максимум 3 балла, нахождение наибольшего значения – максимум – 4 балла. Всего 7 баллов за задачу.

Содержание критерия	**Баллы**
Если обоснованно найдено минимальное значение n+m : сделана оценка и приведен пример	3 балла
Если найдено минимальное значение n+m, при этом сделана только оценка, но не приведен пример	2 балла
Если приведен пример расположения и дан ответ, но не приведено доказательство минимальности	1 балл
Если обоснованно найдено максимальное значение n+m : сделана оценка и приведен пример	4 балла
Если найдено максимальное значение n+m, при этом сделана только оценка, но не приведен пример	2 балла
Если приведен пример расположения и дан ответ, но не приведено доказательство максимальности	1 балл

2. На доске написаны натуральные числа от 1 до 2150. Раз в минуту каждое из чисел изменяется по следующему закону: делится на 100, если оно делится на 100, иначе вычитается 1. Чему будет равно самое большое число через 76 минут.

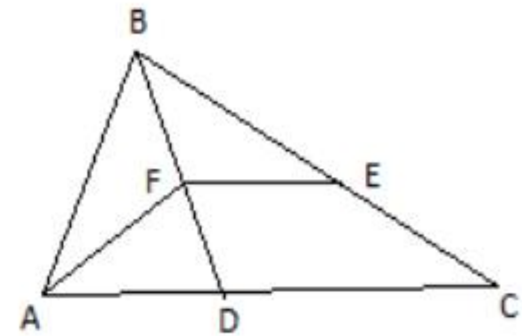
Решение. Заметим, что если число при делении на 100 дает не более 75, то в какой-то момент оно будет делится на 100 и поделится на 100. Значит, после 76 минуты оно будет не более 21. А числа, остаток при делении которых на 100 не менее 76, на 100 не будут поделены. Значит из них будет каждый раз вычитаться 1. Все числа в диапазоне от 2100 до 2150 в какой-то момент будут поделены на 100. Самое большое число, не превосходящее 2150, которое не будет поделено на 100, равно 2099. Из него 76 раз будет вычтена 1. Таким образом, самое большое число - 2023.

Критерий проверки

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ: приведен пример числа, из которого получится 2023, и доказана максимальность этого ответа	7 баллов
Если только указан ответ: максимум 2023, он получается из числа 2099	2 балла

3. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка E, а на биссектрисе BD – точка F, таким образом, что $EF \parallel AC$ и $AF = AD$. Докажите, что $AB = BE$.

Решение. Треугольник AFD – равнобедренный, поэтому $\angle ADF = \angle AFD$. Из параллельности FE и AC имеем $\angle ADF = \angle DFE = \angle AFD$. Тогда $\angle AFB = \angle EFB$. Треугольники ABF и EBF равны по второму признаку равенства треугольников. Следовательно, $AB = BE$.



Критерий проверки

Содержание критерия	Баллы
Приведено верное доказательство	7 баллов
Остальное	0 баллов

4. Положительные (не обязательно целые) числа a, b, c и d таковы, что $a+b+c+d<abcd$. Докажите, что $abc + abd + acd + bcd > 4$.

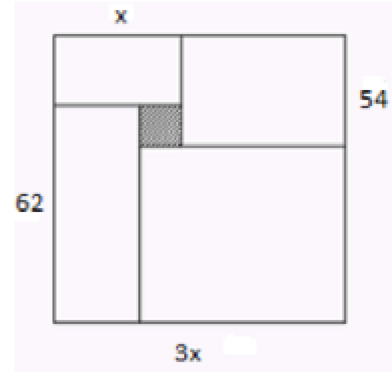
Решение.

Заметим, что $a < a+b+c+d < abcd$, откуда $bcd > 1$. Аналогично, $acd > 1$, $abc > 1$, $abd > 1$. Откуда $abc + abd + acd + bcd > 4$.

Критерий проверки

Содержание критерия	**Баллы**
Приведено верное доказательство	7 баллов
Доказано, что произведение трех любых чисел больше 1	3 балла

5. Внутри большого квадрата расположен квадрат поменьше (см. рис.). Образовалось 4 прямоугольника. Длины четырех показанных на рисунке отрезков равны 54, 62, x и 3x. Найдите x.



Решение. Сложим длины указанных отрезков, лежащих на противоположных сторонах квадрата. Эти суммы будут равны сумме длин сторон большого и маленького квадратов, а значит, равны друг другу. Таким образом,

$54 + 62 = x + 3x$, $4x = 116$, $x = 29$

Ответ: 29

Критерий проверки

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	7 баллов
Если приведен только ответ	1 балл

Спасибо за внимание!