

ISSN 2219-5246
ISSN 2500-2783 (online)

ВЕСТНИК ИВАНОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия «Естественные, общественные науки»

Вып. 2, 2017
Математика

Биология. Химия. Физика. Математика

Научный журнал

Издается с 2000 года

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-60994 от 5 марта 2015 г.

Учредитель ФГБОУ ВО «Ивановский государственный университет»

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ:

- В. Н. Егоров**, д-р экон. наук
(*председатель*)
- С. А. Сырбу**, д-р хим. наук
(*зам. председателя*)
- В. И. Назаров**, д-р психол. наук
(*зам. председателя*)
- К. Я. Авербух**, д-р филол. наук (Москва)
- Ю. М. Воронов**, д-р полит. наук
- Н. В. Усольцева**, д-р хим. наук
- Ю. М. Резник**, д-р филос. наук (Москва)
- О. А. Хасбулатова**, д-р ист. наук
- Л. В. Михеева**
(*ответственный секретарь*)

РЕДКОЛЛЕГИЯ СЕРИИ «ЕСТЕСТВЕННЫЕ, ОБЩЕСТВЕННЫЕ НАУКИ»:

- Б. Я. Солон**, д-р физ.-мат. наук
(*главный редактор серии*)
- В. И. Назаров**, д-р психол. наук
- Т. А. Воронова**, канд. пед. наук
- М. В. Клюев**, д-р хим. наук
- В. А. Исаев**, д-р биол. наук
- Д. И. Молдавский**, д-р физ.-мат. наук
- Е. В. Соколов**, канд. физ.-мат. наук
- В. А. Годлевский**, д-р техн. наук
- Л. И. Минеев**, канд. техн. наук
- О. В. Кузьмина**, канд. юрид. наук
- Д. В. Кареев**, канд. ист. наук

Адрес редакции (издательства):

153025 Иваново, ул. Ермака, 39, к. 462
тел./факс: (4932) 93-43-41
e-mail: publisher@ivanovo.ac.ru

Подписной индекс в каталоге
«Пресса России» 41512

Электронная копия журнала размещена
на сайтах www.library.ru,
www.ivanovo.ac.ru

ISSN 2219-5246
ISSN 2500-2783 (online)

IVANOVO STATE UNIVERSITY BULLETIN

Series «Natural, Social Sciences»

Issue 2, 2017

Biology. Chemistry. Physics. Mathematics

Scientific journal

Issued since 2000

The journal is registered in the Federal Agency for the Oversight in the Sphere of Communication, Information Technology and Mass Communications (Roskomnadzor)
Registration certificate III № ФС77-60993 of March 5, 2015

Founded by Ivanovo State University

EDITORIAL COUNCIL:

- V. N. Egorov**, Doctor of Economics
(Chairman)
- S. A. Syrbu**, Doctor of Chemistry
(Vice-Chairman)
- V. I. Nazarov**, Doctor of Psychology
(Vice-Chairman)
- K. Ya. Averbukh**, Doctor of Philology
(Moscow)
- Yu. M. Voronov**, Doctor of Politics
- N. V. Usoltseva**, Doctor of Chemistry
- Yu. M. Reznik**, Doctor of Philosophy
(Moscow)
- O. A. Khasbulatova**, Doctor of History
- L. V. Mikheeva** (Secretary-in-Chief)

EDITORIAL BOARD OF THE SERIES

«NATURAL, SOCIAL SCIENCES»:

- B. Ya. Solon**, Doctor of Physics
and Mathematics
(Chief Editor of the Series)
- V. I. Nazarov**, Doctor of Psychology
- T. A. Voronova**, Candidate of Science
- M. V. Klyuev**, Doctor of Chemistry
- V. A. Isaev**, Doctor of Biology
- D. I. Moldavansky**, Doctor of Physics
and Mathematics
- E. V. Sokolov**, Candidate of Science,
Physics and Mathematics
- V. A. Godlevsky**, Doctor of Technical Science
- L. I. Mineev**, Candidate of Technical Science
- O. V. Kuzmina**, Candidate of Science, Law
- D. V. Kareev**, Candidate of Science, History

Address of the editorial office:

153025, Ivanovo, Ermak str., 39, office 462
tel./fax: (4932) 93-43-41
e-mail: publisher@ivanovo.ac.ru

Index of subscription
in the catalogue «Russian Press» 41512
Electronic copy of the journal can be found
on the web-sites www.elibrary.ru,
www.ivanovo.ac.ru

СОДЕРЖАНИЕ

Биология

Баринов С. Н. Инвентаризация видового списка объектов животного мира, отнесенных к охотничьим ресурсам Ивановской области	5
Баринова М. О., Зарипов В. Н., Королева С. В. Особенности изменений базовых показателей кардиореспираторной системы у курсантов в условиях имитации профессиональной деятельности	12
Борисова Е. А., Исаев В. А. А. А. Салеев — врач, биолог, краевед (К 95-летию со дня рождения)	16
Борисова И. Н., Степанова Н. Н. Примулы ботанического сада Ивановского государственного университета	24
Борисова И. Н., Чекан И. В. Эфиромасличные культуры в ботаническом саду Ивановского государственного университета	29
Мельников В. Н., Чудненко Д. Е. Обзор дневных хищных птиц Ивановской области	32
Минеева Л. Ю., Тихомирова Н. Г. Грибные болезни древесных растений окрестностей особо охраняемой природной территории «Рубское озеро»	44

Химия

Крылов Е. Н., Кильдюшова С. С. Теоретический анализ реакционной способности нуклеофилов в реакциях аминолиза, гидролиза и алкоголиза арилсульфонилхлоридов	51
Крылов Е. Н., Цветкова Д. В. Теоретический анализ активности нитроний-галогенидов в реакциях ароматического нитрования и галогенирования	54

Математика

Ваганов С. Е., Хашин С. И. Сравнение эффективности различных версий метода Лукаса — Канаде	63
Кремешкова Ю. А., Пухов С. В., Туманова Е. А. О геометрической интерпретации В-сплайнов второй степени	70
Молдавский Д. И. Об отделимости циклических подгрупп в прямом произведении групп	83
Соколов Е. В. Алгоритмы получения общего секретного ключа, использующие группы с тождествами	93
Хашина Ю. А. Биквадратичные функции и их представление в виде суммы квадратов	98

<i>Сведения об авторах</i>	105
----------------------------------	-----

<i>Информация для авторов</i> <i>«Вестника Ивановского государственного университета»</i>	108
--	-----

CONTENTS

Biology

Barinov S. N. Inventory of species list of the wildlife objects, referenced to the hunting resources in the Ivanovo region	5
Barinova M. O., Zaripov V. N., Koroleva C. V. Features of basic cardiorespiratory system indicators changes of cadets under the conditions of their professional activities imitation	12
Borisova E. A., Isaev V. A. A. A. Saleev — a physician, a biologist, and a local ethnographer (To the 95th anniversary)	16
Borisova I. N., Stepanova N. N. The <i>Primula L.</i> of Ivanovo State University botanical garden	24
Borisova I. N., Chekan I. V. Essential oil crops in the botanical garden of Ivanovo State University	29
Melnikov V. N., Chudnenko D. E. A review of Ivanovo region raptors	32
Mineeva L. Yu., Tikhomirova N. G. Fungal diseases of woody plants in the surroundings of «Rubskoye lake» protected area	44

Chemistry

Krylov E. N., Kildyushova S. S. A theoretical analysis of nucleophiles reaction ability in reactions of aminolysis, hydrolysis and alcoholysis of aryl sulphonyl chlorides	51
Krylov E. N., Tschvetkova D. V. A theoretical analysis of nitronium-halides activity in nitration and bromination reactions	54

Mathematics

Vaganov S. E., Khashin S. I. A comparison of the effectiveness of different versions of Lucas — Kanade method	63
Kremeshkova Yu. A., Puhov S. V., Tumanova E. A. On the geometric interpretation of B-splines of degree 2	70
Moldavanskii D. I. On the separability of cyclic subgroups in the direct product of groups	83
Sokolov E. V. Key agreement protocols based on groups with nontrivial identities	93
Khashina Yu. A. Biquadratic functions and their presentation as a sum of the quadrates	98
<i>Information about the authors</i>	105
<i>Information for the authors of «Ivanovo State University Bulletin»</i>	108

ИНВЕНТАРИЗАЦИЯ ВИДОВОГО СПИСКА ОБЪЕКТОВ ЖИВОТНОГО МИРА, ОТНЕСЕННЫХ К ОХОТНИЧЬИМ РЕСУРСАМ ИВАНОВСКОЙ ОБЛАСТИ

Инвентаризация видового списка объектов животного мира, отнесенных к объектам охоты на территории Ивановской области, уже проводилась. С тех пор появились новые фаунистические данные, законодательство в сфере охоты претерпело определенные изменения, следовательно, сформировалась необходимость провести новую инвентаризацию списка, а кроме того, уточнить статус некоторых видов животных.

Ключевые слова: инвентаризация видового списка, объекты животного мира, виды-интродуценты, охотничьи ресурсы, Красная книга, Ивановская область.

The inventory of species list of wildlife objects of, related to hunting in the Ivanovo region, has been carried out. Since then, however, some of the factors taken into consideration have changed: new faunal data, legislation in the field of hunting has undergone some changes; therefore, the need emerged to draw up a new inventory. In addition, the need to clarify the status of some animal species became clear.

Key words: inventory of species list, the objects of wildlife, introduced species, hunting resources, Red Book, Ivanovo region.

В соответствии с Федеральным законом «О животном мире» [14], значительная часть полномочий Российской Федерации в области охраны и использования животного мира передана для осуществления органам государственной власти субъектов РФ. Формирование видового списка объектов животного мира, отнесенных к объектам охоты на подведомственной территории, является задачей специально уполномоченных государственных органов по охране, контролю и регулированию использования объектов животного мира и среды их обитания (в составе исполнительной власти субъектов РФ). Этот список служит основой при ведении государственного учета численности объектов животного мира, государственного мониторинга и кадастра объектов животного мира (государственный охотхозяйственный реестр) в пределах субъекта РФ. Совершенно очевидно, что полноценный список видов животных, отнесенных к объектам охоты (охотничьим ресурсам), должен быть сформирован и на федеральном уровне.

В Ивановской области данный список принят законом, но представлен не конкретно, а ссылкой на ч. 1 ст. 11 Федерального закона [16] и дополнительным списком из 5 видов птиц. Однако для рационального использования ресурсов, в том числе решения вопросов интродукции, области необходим видовой список объектов животного мира, отнесенных

к охотничьим ресурсам и обитающих именно на ее территории, а не на всем пространстве Российской Федерации.

Считаем необходимым также пересмотреть статус собственности или охраны для следующих видов животных (возможность свободного изъятия с земельных участков, находящихся в собственности): крысы серой — *Rattus norvegicus* (Berkenhout, 1769), мыши домовая — *Mus musculus* (Linnaeus, 1758), мыши полевой — *Apodemus agrarius* (Pallas, 1771), полевки обыкновенной — *Microtus arvalis* (Pallas, 1778), полевки рыжей — *Myodes glareolus* (Schreber, 1780) и других подобных видов (в особенности синантропных). Статус государственной собственности, на наш взгляд, не самый оптимальный в их отношении вариант, тем более они обитают на земельных участках, находящихся в собственности у физических и юридических лиц. Это актуально и в связи с тем, что в соответствии со ст. 43 Федерального закона «О животном мире» «добыча объектов животного мира, не отнесенных к охотничьим ресурсам и водным биологическим ресурсам, допускается только по разрешениям специально уполномоченных государственных органов» [14]. В данном случае может возникнуть вопрос о причинении ущерба частной собственности представителями объектов животного мира, находящихся в государственной собственности. Вероятно, необходимы какие-либо изменения статуса собственности или охраны также для хомяка обыкновенного, крота европейского и полевки водяной.

Виды животных, отнесенные к объектам охоты, являются государственной собственностью и передаются в пользование охотпользователям. Между органами исполнительной власти Ивановской области и охотпользователями заключены охотхозяйственные соглашения. Соответственно соглашениям на охотпользователей возлагается обязанность проведения мероприятий по сохранению охотничьих ресурсов и среды их обитания, осуществлению мониторинга и учета численности, оценке состояния охотничьих ресурсов, а также среды их обитания, ведению учета добычи охотничьих ресурсов. Основные обязанности охотпользователей изложены в Федеральном законе [16], в котором приводится примерная форма охотхозяйственного соглашения.

Список видов охотничьих ресурсов Ивановской области достаточно велик, но вряд ли целесообразно требовать от охотпользователей заполнять большие полупустые таблицы: многие виды животных встречаются крайне редко или трудноопределимы для рядового охотника и не имеют никакого хозяйственного значения. Считаю возможным исключить их из таблиц отчетов, а в конце таблиц оставить несколько пустых строк для заполнения охотпользователями по мере возникновения необходимости.

Мониторинг численности хозяйственно «не востребованных» охотпользователями видов охотничьих животных (белка, горностай, хорь, ласка и др.), в особенности с экспоненциальным (триггерным) типом роста популяций, по нашему мнению, нецелесообразен, во-первых, по причине недостаточной квалификации учетчиков, а часто их недобросовестности в силу незаинтересованности в точности учетов (считаю, что система государственного мониторинга не нуждается в недостоверных сведениях), во вторых, потому, что в современных социально-экономических условиях охотники просто не оказывают какого-либо существенного влияния на динамику численности многих видов (в основе сокращения численности видов с экспоненциальным типом роста лежат природные факторы смертности, а восстановление численности не требует биотехнических мероприятий). Мониторинг состояния

численности данных видов и среды их обитания должен вестись на особо охраняемых природных территориях, для которых данный мониторинг является структурным элементом уставной деятельности. Таким образом, под мониторинг ресурсов должны быть подведены не только правовые основы, но и экономические стимулы.

Мы не претендуем на проработку всего комплекса возникающих вопросов по формированию и использованию списка охотничьих животных Ивановской области, а лишь обозначаем основной алгоритм решения стоящих задач. Возможно, предлагаемый список привлечет определенное внимание к этой проблеме и будет способствовать составлению наиболее адекватного списка с позиций таксономии, права и экономики природопользования.

На основании научных исследований и в соответствии с действующим законодательством предлагаем оптимизированный перечень видов охотничьих ресурсов, обитающих или обитавших ранее на территории, на которой в настоящее время функционирует Ивановская область (табл. 1). Видовые названия животных приводятся в соответствии с общедоступной информационной системой и интегрированной базой данных по разнообразию позвоночных животных России, доступной в глобальной сети Интернет [9]. Там, где в интегрированной базе данных и законодательстве об охоте имеются разночтения в видовых названиях охотничьих ресурсов (видов животных), в скобках приводится второе название.

Таблица 1

**Видовой список объектов животного мира,
отнесенных к охотничьим ресурсам (объектам охоты)**

№ п/п	Видовое название	
I. Класс ПТИЦЫ — <i>Aves</i>		
1	Бекас	<i>Gallinago gallinago</i> (Linnaeus, 1758)
2	Белобровик [15]	<i>Turdus iliacus</i> (Linnaeus, 1766)
3	Белоглазая чернеть [5]	<i>Aythya nyroca</i> (Güldenstädt, 1770)
4	Белолобый гусь	<i>Anser albifrons</i> (Scopoli, 1769)
5	Белошекая казарка	<i>Branta leucopsis</i> (Bechstein, 1803)
6	Большой веретенник	<i>Limosa limosa</i> (Linnaeus, 1758)
7	Вальдшнеп	<i>Scolopax rusticola</i> (Linnaeus, 1758)
8	Вяхирь	<i>Columba pulumbus</i> (Linnaeus, 1758)
9	Гаршнеп	<i>Lymnocryptes minimus</i> (Brunnich, 1764)
10	Глухарь	<i>Tetrao urogallus</i> (Linnaeus, 1758)
11	Грач [15]	<i>Corvus frugilegus</i> (Linnaeus, 1758)
12	Гуменник	<i>Anser fabalis</i> (Latham, 1787)
13	Длинноносый крохаль* [5]	<i>Mergus serrator</i> (Linnaeus, 1758)
14	Дупель	<i>Gallinago media</i> (Latham, 1787)
15	Камнешарка* [5]	<i>Arenaria interpres</i> (Linnaeus, 1758)
16	Камышница	<i>Gallinula chloropus</i> (Linnaeus, 1758)
17	Коростель	<i>Crex crex</i> (Linnaeus, 1758)
18	Красноголовая чернеть	<i>Aythya ferina</i> (Linnaeus, 1758)
19	Красноносый нырок* [5]	<i>Netta rufina</i> (Pallas, 1773)

20	Кряква	<i>Anas platyrhynchos</i> (Linnaeus, 1758)
21	Лысуха	<i>Fulica atra</i> (Linnaeus, 1758)
22	Мородунка	<i>Xenus cinereus</i> (Guldenstadt, 1775)
23	Морская чернеть	<i>Aythya marila</i> (Linnaeus, 1761)
24	Морянка* [5]	<i>Clangula hyemalis</i> (Linnaeus, 1758)
25	Обыкновенная гага [5]	<i>Somateria mollissima</i> (Linnaeus, 1758)
26	Обыкновенная горлица	<i>Streptopelia turtur</i> (Linnaeus, 1758)
27	Обыкновенный гоголь	<i>Bucephala clangula</i> (Linnaeus, 1758)
28	Обыкновенный турпан* [5]	<i>Melanitta fusca</i> (Linnaeus, 1758)
29	Пастушок*	<i>Rallus aquaticus</i> (Linnaeus, 1758)
30	Перепел	<i>Coturnix coturnix</i> (Linnaeus, 1758)
31	Погоньш* (обыкновенный погоньш)	<i>Porzana porzana</i> (Linnaeus, 1766)
32	Рябинник [15]	<i>Turdus pilaris</i> (Linnaeus, 1758)
33	Рябчик	<i>Tetrastes bonasia</i> (Linnaeus, 1758)
34	Свиязь	<i>Anas penelope</i> (Linnaeus, 1758)
35	Серая ворона [15]	<i>Corvus cornix</i> (Linnaeus, 1758)
36	Серая куропатка	<i>Perdix perdix</i> (Linnaeus, 1758)
37	Серая утка*	<i>Anas strepera</i> (Linnaeus, 1758)
38	Серый гусь	<i>Anser anser</i> (Linnaeus, 1758)
39	Сизый голубь	<i>Columba livia</i> (Gmelin, 1789)
40	Синьга* [5]	<i>Melanitta nigra</i> (Linnaeus, 1758)
41	Средний кроншнеп* [5]	<i>Numenius phaeopus</i> (Linnaeus, 1758)
42	Тетерев	<i>Lyrurus tetrrix</i> (Linnaeus, 1758)
43	Тулес*	<i>Pluvialis squatarola</i> (Linnaeus, 1758)
44	Турухтан	<i>Prilomachus pugnax</i> (Linnaeus, 1758)
45	Фазан	<i>Phasianus colchicus</i> (Linnaeus, 1758)
46	Хохлатая чернеть	<i>Aythya fuligula</i> (Linnaeus, 1758)
47	Хрустан* [5]	<i>Eudromias morinellus</i> (Linnaeus, 1758)
48	Черный дрозд [15]	<i>Turdus merula</i> (Linnaeus, 1758)
49	Чибис	<i>Vanellus vanellus</i> (Linnaeus, 1758)
50	Чирок-свистунок	<i>Anas crecca</i> (Linnaeus, 1758)
51	Чирок-трескунок	<i>Anas querquedula</i> (Linnaeus, 1758)
52	Шилохвость	<i>Anas acuta</i> (Linnaeus, 1758)
53	Широконоска	<i>Anas clypeata</i> (Linnaeus, 1758)
II. Класс МЛЕКОПИТАЮЩИЕ — <i>Mamalia</i>		
1	Барсук европейский (барсук)	<i>Meles meles</i> (Linnaeus, 1758)
2	Белка обыкновенная	<i>Sciurus vulgaris</i> (Linnaeus, 1776)
3	Бобр обыкновенный (европейский)	<i>Castor fiber</i> (Linnaeus, 1758)
4	Бурундук азиатский [7]	<i>Tamias sibiricus</i> (Laxmann, 1769)
5	Волк	<i>Canis lupus</i> (Linnaeus, 1758)
6	Выдра речная (выдра)	<i>Lutra lutra</i> (Linnaeus, 1758)
7	Горностай	<i>Mustela erminea</i> (Linnaeus, 1758)
8	Заяц-беляк	<i>Lepus timidus</i> (Linnaeus, 1758)
9	Заяц-русак	<i>Lepus europeus</i> (Pallas, 1778)
10	Зубр	<i>Bison bonasus</i> (Linnaeus, 1758)

11	Кабан	<i>Sus scrofa</i> (Linnaeus, 1758)
12	Косуля европейская* [3]	<i>Capreolus capreolus</i> (Linnaeus, 1758)
13	Косуля сибирская* [3]	<i>Capreolus pugargus</i> (Pallas, 1771)
14	Крот европейский (обыкновенный)	<i>Talpa europaea</i> (Linnaeus, 1758)
15	Куница каменная [4]	<i>Martes foina</i> (Erxleben, 1777)
16	Куница лесная	<i>Martes martes</i> (Linnaeus, 1758)
17	Ласка	<i>Mustela nivalis</i> (Linnaeus, 1758)
18	Лисица обыкновенная	<i>Vulpes vulpes</i> (Linnaeus, 1758)
19	Лось	<i>Alces alces</i> (Linnaeus, 1758)
20	Медведь бурый	<i>Ursus arctos</i> (Linnaeus, 1758)
21	Норка американская	<i>Neovison vison</i> (Schreber, 1777)
22	Норка европейская	<i>Mustela lutreola</i> (Linnaeus, 1761)
23	Олень благородный (благородный олень)	<i>Cervus elaphus</i> (Linnaeus, 1758)
24	Олень пятнистый (пятнистый олень)	<i>Cervus nippon</i> (Temminck, 1838)
25	Олень северный (дикий северный олень) [10, 12]	<i>Rangifer tarandus</i> (Linnaeus, 1758)
26	Ондатра	<i>Ondatra zibethicus</i> (Linnaeus, 1766)
27	Полевка водяная* (водяная полевка)	<i>Arvicola terrestris</i> (Linnaeus, 1758)
28	Росомаха [10, 12]	<i>Gulo gulo</i> (Linnaeus, 1758)
29	Рысь обыкновенная (рысь)	<i>Lynx lynx</i> (Linnaeus, 1758)
30	Собака енотовидная (енотовидная собака)	<i>Nyctereutes procyonoides</i> (Gray, 1834)
31	Хомяк обыкновенный*	<i>Cricetus cricetus</i> (Linnaeus, 1758)
32	Хорь лесной	<i>Mustela putorius</i> (Linnaeus, 1758)

Примечание. Полужирным шрифтом выделены виды, не представленные в первоначальном списке 2008 г. [2], звездочкой — виды, размещение которых, по нашему мнению, в формах отчетности охотпользователей нецелесообразно.

Всего на территории Ивановской области в период с начала XIX в. установлено обитание более 80 видов охотничьих животных (видов охотничьих ресурсов). Однако для практического применения в работе охотпользователей, на наш взгляд, целесообразно было бы использовать список из 57 видов.

Среди перечисленных в табл. 1 видов животных есть виды-интродуценты: норка американская, олень благородный, олень пятнистый, косуля европейская, косуля сибирская, собака енотовидная, кабан, ондатра, бобр обыкновенный. Некоторые из них были расселены в ходе преднамеренной интродукции (реинтродукции) и впоследствии распространились на современной территории (бобр, олень благородный), популяции других видов сформировались и в ходе преднамеренной интродукции, и в ходе самостоятельного расселения (беглец из звероводческих хозяйств — норка американская). В сфере управления охотничьим хозяйством необходимо учитывать и тот факт, что Федеральным законом к сельскохозяйственным животным отнесены: олени (маралы, пятнистые олени, северные олени), пушные звери, гуси, перепелки, утки [13].

Ряд видов в настоящее время не обитают на территории области, но согласно некоторым письменным источникам [12], россомаха, олень северный заходили на территорию Костромской и Ярославской губерний. Поскольку Ивановская область образована путем отделения территорий от Владимирской, Костромской и Ярославской губерний в начале XX в. [19], то, следовательно, виды, обитавшие на территориях данных областей до их отделения, ретроспективно относятся и к Ивановской области. В период существования Ивановской промышленной области олень благородный, олень северный и россомаха также были указаны в фаунистическом списке [1]. С 1989 г. вольная популяция зубров обитает в заказнике «Муромский» во Владимирской области [8], имеются устные сообщения от охотников о заходах зубров на территорию Ивановской области.

Смысл обозначения видов, ранее обитавших на территориях, которые в настоящее время включены в Ивановскую область, в том, что в нашей стране периодически предпринимаются попытки акклиматизации разных видов животных. По нашему мнению, лучшие результаты может дать реинтродукция. Вопрос интродукции вновь поднимается [18]. Ведется определенная работа по сокращению численности кабана (снижение плотности населения его группировки на территории Ивановской области до 0,25 особи/тыс. га), делаются попытки замещения его другими видами копытных.

Виды, включенные в Красную книгу РФ и Красную книгу Ивановской области, с момента утверждения их в данном статусе исключены из списка охотничьей фауны. Однако некоторые из них, несмотря на особый охранный статус, указаны в форме 1.2. ЧП охотхозяйственного реестра как виды, относящиеся к охотничьим ресурсам [6].

В данной статье «краснокнижные» виды животных приводятся для подчеркивания их особого охранный статуса и в качестве ретроспективной иллюстрации формирования фаунистического списка охотничьих животных на территории Ивановской области (табл. 2).

Таблица 2

Виды животных, исключенные из списка охотничьих ресурсов (объектов охоты) вследствие включения в Красную книгу РФ и Красную книгу Ивановской области

№ п/п	Видовое название	
I. Класс ПТИЦЫ — <i>Aves</i>		
1	Белая куропатка [11]	<i>Lagopus lagopus</i> (Linnaeus, 1758)
2	Большой кроншнеп [11]	<i>Numenius arquata</i> (Linnaeus, 1758)
3	Большой крохаль [17]	<i>Mergus merganser</i> (Linnaeus, 1758)
4	Большой улит [17]	<i>Tringa nebularia</i> (Gunnerus, 1767)
5	Клинтух [17]	<i>Columba oenas</i> (Linnaeus, 1758)
6	Кольчатая горлица [17]	<i>Streptopelia decaocto</i> (Frisvaldszky, 1838)
7	Луток [17]	<i>Mergus albellus</i> (Linnaeus, 1758)
8	Пискулька [11]	<i>Anser erythropus</i> (Linnaeus, 1758)
9	Травник [17]	<i>Tringa totanus</i> (Linnaeus, 1758)
II. Класс МЛЕКОПИТАЮЩИЕ — <i>Mamalia</i>		
1	Летяга обыкновенная (летяга) [17]	<i>Pteromys volans</i> (Linnaeus, 1758)

С позиций систематики приведенные в списке виды относятся к двум классам позвоночных животных. Класс птиц в охотничьей фауне Ивановской области представлен 53 видами, а класс млекопитающих — 32 видами. Таким образом, обновленный список видов охотничьей фауны на территории Ивановской области составляет 85 видов.

Автор благодарит всех коллег, делившихся своими фаунистическими наблюдениями.

Библиографический список

1. Альбицкий Ф. А. Животный мир области // Альбицкий Ф. А., Пчелкин В. М. Растительность и животный мир области. Иваново : Гос. изд-во, Иван. обл. отд-ние, 1931. 48 с.
2. Баринов С. Н. Инвентаризация видового списка объектов животного мира, отнесенных к объектам охоты на территории Ивановской области // Состояние среды обитания и фауна охотничьих животных России : материалы Всероссийской научно-практической конференции. М., 2008. С. 14—18.
3. Баринов С. Н., Волков Е. В. Виды-интродуценты в составе охотничьей фауны Ивановской области // Состояние среды обитания и фауна охотничьих животных России : материалы VI Всероссийской научно-практической конференции. М., 2013. С. 27—33.
4. Буслаев С. В. Каменная куница (*Martes foina* Erxleben, 1777) в Ивановской области // Состояние среды обитания и фауна охотничьих животных России : материалы VI Всероссийской научно-практической конференции. М., 2013. С. 49—51.
5. Герасимов Н. Ю., Сальников Г. М., Буслаев С. В. Птицы Ивановской области. М. : Россельхозакадемия, 2000. 125 с.
6. Государственный охотхозяйственный реестр Ивановской области : (открытые данные) // Официальный сайт Департамента природных ресурсов и экологии Ивановской области. URL: <http://eco.ivanovoobl.ru/opendata/gosudarstvennyj-ohothozyajstvennyj-geestr> (дата обращения: 18.01.2017).
7. Зайцев В. А. Позвоночные животные северо-востока Центрального региона России : (виды фауны, численность и ее изменения). М. : КМК, 2006. 513 с.
8. Заказник «Муромский». URL: <http://www.park-meshera.ru/Zakazniki/Muromskiy> (дата обращения: 14.02.2017).
9. Интегрированная база данных (БД) по разнообразию позвоночных животных России. URL: <http://www.sevin.ru/vertebrates> (дата обращения: 05.02.2017).
10. Кириков С. В. Промысловые животные, природная среда и человек. М. : Наука, 1966. 348 с.
11. Красная книга Российской Федерации : (животные). М. : АСТ : Астрель, 2001. 862 с.
12. Крживоблоцкий Я. Материалы для географии и статистики России, собранные офицерами генерального штаба : Костромская губерния. СПб. : Тип. Н. Тиблена и К°, 1861. 641 с.
13. О государственной поддержке в сфере сельскохозяйственного страхования и о внесении изменений в Федеральный закон «О развитии сельского хозяйства» : Федеральный закон от 25.07.2011 г. № 260-ФЗ : (ред. от 23.06.2016 г.). URL: <http://www.consultant.ru> (дата обращения: 14.02.2017).
14. О животном мире : Федеральный закон от 24.04.1995 г. № 52-ФЗ. URL: <http://base.garant.ru> (дата обращения: 05.02.2017).
15. О некоторых вопросах регулирования правоотношений в сфере промысловой охоты и сохранения охотничьих ресурсов : закон Ивановской области от 07.10.2010 г. № 99-ОЗ. URL: <http://eco.ivanovoobl.ru/regionalnye/zakon-ivanovskoj-oblasti-o-nekotoryh-voprosah-regulirovaniya-pravootnoshenij-v-sfere-promyslovoj-ohoty-i-sohraneniya-ohotnichih-resursov> (дата обращения: 12.02.2017).

16. Об охоте и о сохранении охотничьих ресурсов и о внесении изменений в отдельные законодательные акты Российской Федерации : Федеральный закон от 24.07.2009 г. № 209-ФЗ : (ред. от 23.06.2016 г.). URL: <http://base.garant.ru> (дата обращения: 05.02.2017).
17. Об утверждении перечня объектов животного мира, занесенных в Красную книгу Ивановской области : постановление Правительства Ивановской области от 10.05.2007 г. № 111-п // Собрание законодательства Ивановской области. 2007. № 18.
18. Об утверждении плана действий по предотвращению заноса на территорию РФ африканской чумы свиней : распоряжение Правительства РФ от 30.09.2016 г. № 2048-р. URL: <http://base.garant.ru> (дата обращения: 05.02.2017).
19. Справочник по административно-территориальному делению Ивановской области, 1918—1965 гг. Ярославль : Верх.-Волж. кн. изд-во, 1965. 123 с.

УДК 616.12-008.1-072.7

М. О. Барина, В. Н. Зарипов, С. В. Королева

ОСОБЕННОСТИ ИЗМЕНЕНИЙ БАЗОВЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КАРДИОРЕСПИРАТОРНОЙ СИСТЕМЫ У КУРСАНТОВ В УСЛОВИЯХ ИМИТАЦИИ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Выявлено, что базовые показатели кардиореспираторной системы (частота сердечных сокращений и частота дыхательных движений) у курсантов в условиях, максимально приближенных к реальным при тушении пожара, изменяются адекватно воздействующей нагрузке и быстро восстанавливаются до исходного уровня после прекращения действия нагрузки.

Ключевые слова: курсанты, условия имитации профессиональной деятельности, частота сердечных сокращений, частота дыхательных движений.

Basic indices of cardiorespiratory system (heart rate and frequency of respiratory movements) of cadets under the conditions which come as close as possible to the real ones in case of fire extinguishing, change in accordance with the input pressure, and are quickly recovered to the initial level after cancellation of it.

Key words: cadets, the conditions of imitation of professional activity, heart rate, frequency of respiratory movements.

Профессиональная деятельность спасателей осуществляется в стрессогенных условиях, которые оказывают негативное влияние на их работоспособность и состояние здоровья. Кардиореспираторная система первой реагирует на воздействие любых нагрузок, поэтому она может рассматриваться как индикатор адаптационных реакций организма в целом.

Целью настоящего исследования явилось изучение изменений базовых показателей кардиореспираторной системы у курсантов после воздействия нагрузки в условиях, максимально приближенных к реальным при тушении пожара.

© Барина М. О., Зарипов В. Н., Королева С. В., 2017

• Серия «Естественные, общественные науки»

Материал и методы исследования

Исследование проводилось на базе научно-исследовательской лаборатории «Медицина катастроф» Ивановской пожарно-спасательной академии ГПС МЧС России и учебно-тренировочного стационарного комплекса «ГРОТ К», находящегося в с. Бибиреве Ивановской области.

В исследовании принимали участие 38 курсантов Ивановской пожарно-спасательной академии в возрасте от 17 до 22 лет.

Было проведено 3 серии (этапа) обследований курсантов: до нагрузки, сразу после нагрузки, спустя 2 дня после нагрузки (восстановление). Нагрузку создавали в учебно-тренировочном стационарном комплексе «ГРОТ К», который позволяет имитировать условия профессиональной деятельности пожарных. Данный комплекс содержит тренажеры разного уровня сложности для создания физической нагрузки: создается определенная высокая температура и задымленность воздуха. Кроме того, для психологической нагрузки во время тренировки используется система звуковых и световых эффектов в виде шумов при обрушении конструкций, выходящего из трубопровода газа, криков пострадавших, вспышек паров или газов при взрывах.

У курсантов на каждом этапе обследований оценивали базовые показатели кардиореспираторной системы: частоту сердечных сокращений (ЧСС, уд./мин) и частоту дыхательных движений (ЧДД, дв./мин). Исследование проводили с использованием аппаратно-программного комплекса «Рео-Спектр» фирмы «Нейрософт» (г. Иваново, Россия).

Статистическую обработку полученных данных выполняли по t-критерию Стьюдента.

Результаты исследования и их обсуждение

В ходе проведенного исследования было установлено, что у курсантов сразу после нагрузки в условиях имитации профессиональной деятельности достоверно увеличивалась ЧСС. Однако уже через два дня после нагрузки значение этого показателя возвращалось к исходному уровню (рис. 1).

Известно, что ЧСС — информативный физиологический показатель, который характеризует психоэмоциональное состояние, реакцию организма на физическую нагрузку и окружающую среду [1, 3].

Исследования А. Г. Загородникова с сотрудниками [2] показали, что чем меньше изменения ЧСС во время пробы с физической нагрузкой, тем быстрее эти изменения восстанавливаются до исходного уровня, тем надежнее физиологические резервы организма военнослужащего. Незначительное увеличение ЧСС при дозированной физической нагрузке объясняется, возможно, высоким уровнем тренированности курсантов [4, 5, 6, 7].

Экстремальная нагрузка приводила у курсантов к достоверному увеличению ЧДД, а спустя 2 дня после нагрузки значение этого показателя также возвращалось к исходному уровню (рис. 2).

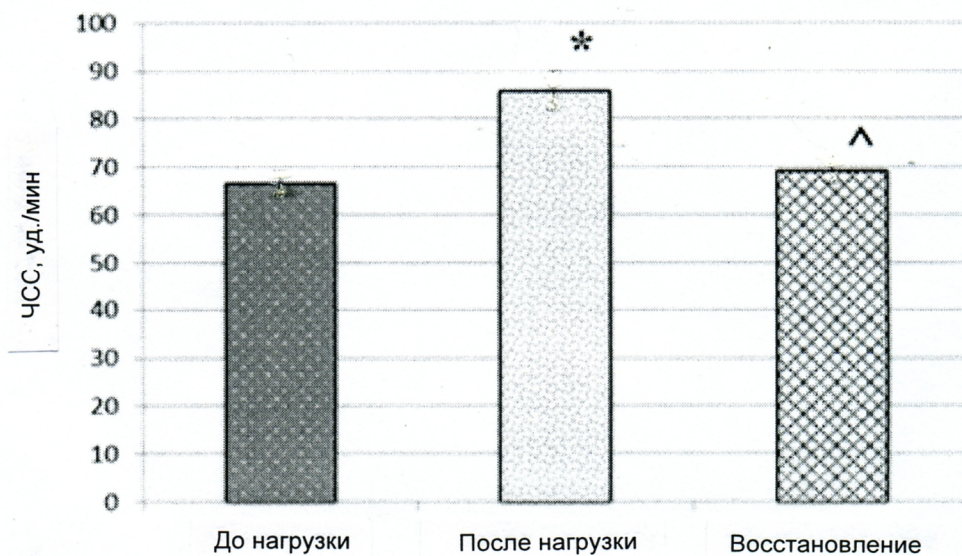


Рис. 1. Изменение у курсантов частоты сердечных сокращений

Достоверность отличий:
 до нагрузки — после нагрузки: * — $p < 0,05$;
 после нагрузки — восстановление: ^ — $p < 0,05$

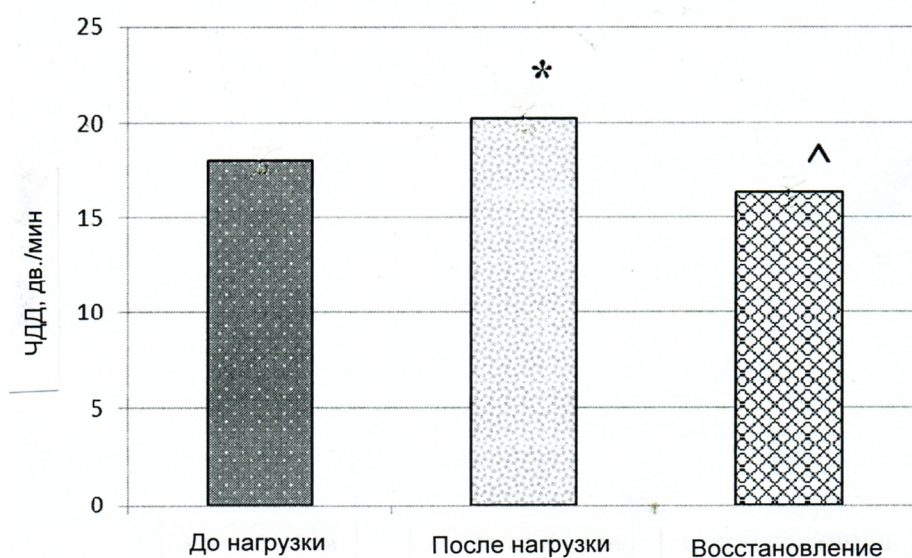


Рис. 2. Изменение у курсантов частоты дыхательных движений

Достоверность отличий:
 до нагрузки — после нагрузки: * — $p < 0,05$;
 после нагрузки — восстановление: ^ — $p < 0,05$

По-видимому, возрастание ЧСС и ЧДД при нагрузке прежде всего связано с ростом метаболических потребностей организма и обеспечивает усиленный транспорт кислорода к мышцам [8]. Восстановление этих показателей спустя 2 дня после нагрузки до исходных значений может свидетельствовать, во-первых, о хороших компенсаторных возможностях организма

курсантов, а во-вторых, о том, что данный вид тренировочных нагрузок, хотя и способствует активации физиологических систем, но, тем не менее, не оставляет существенных следовых изменений в организме [9].

Выводы

1. У курсантов после нагрузки в условиях имитации профессиональной деятельности возрастают ЧСС и ЧДД.
2. Базовые показатели кардиореспираторной системы курсантов через 2 дня после нагрузки восстанавливаются до исходного уровня.
3. Используемый вид тренировочных нагрузок способствует активации кардиореспираторной системы.

Библиографический список

1. *Воронин Р. М.* Психологические характеристики и особенности деятельности сердечно-сосудистой системы курсантов Академии ФСИН России // Вестник новых медицинских технологий. 2011. № 4. С. 14—15.
2. *Загородников А. Г., Попов В. И., Загородников Г. Г., Горичный В. А.* Оценка адаптационных резервов сердечно-сосудистой системы у военнослужащих разных соматотипических групп // Фундаментальные исследования. 2013. Т. 2, № 12. С. 209—213.
3. *Зарипов В. Н., Баринаова М. О.* Изменения показателей сердечного ритма у студентов с разным уровнем психоэмоционального напряжения во время сдачи экзаменов // Современные проблемы науки и образования. 2013. № 3. URL: <http://www.science-education.ru/rules/> (дата обращения: 07.11.2013).
4. *Королева С. В., Мкртычян А. С., Петров Д. Л., Зарипов В. Н., Баринаова М. О.* Особенности variability сердечного ритма у курсантов вуза МЧС ГПС России в различных группах профпригодности // Подготовка кадров в системе предупреждения и ликвидации последствий чрезвычайных ситуаций: материалы Международной научно-практической конференции. СПб., 2014. С. 124—126.
5. *Макарова И. С., Королева С. В., Баринаова М. О.* Оценка функционального состояния сердечно-сосудистой системы курсантов под влиянием нагрузки, имитирующей условия профессиональной деятельности // Материалы и методы инновационных исследований и разработок: сборник статей Международной научно-практической конференции: в 3 ч. Уфа: МЦИИ «Omega Science», 2016. Ч. 3. С. 47—48.
6. *Мкртычян А. С., Королева С. В., Петров Д. Л., Зарипов В. Н., Баринаова М. О.* Категории профессиональной пригодности и особенности деятельности сердечно-сосудистой системы курсантов института противопожарного профиля // Проблемы психологических последствий, связанных с радиационными авариями и другими чрезвычайными ситуациями: материалы Международной научно-практической конференции. М., 2014. С. 77—79.
7. *Прокотьев Н. Я., Рябчук А. В.* Влияние термического воздействия и физической нагрузки на уровень вегетативного обеспечения у курсантов военных училищ, занимающихся гиревым спортом // Вестник Тюменского государственного университета. 2009. № 5. С. 54—59.
8. *Хачатрян А. П.* Особенности динамики показателей электрического импеданса при дозированных физических нагрузках у студентов — спортсменов различной специализации // Вестник Томского государственного педагогического университета. 2011. № 5. С. 45—48.
9. *Чернова Е. А., Баринаова М. О., Королева С. В.* Оценка функционального состояния дыхательной системы курсантов под влиянием нагрузки, имитирующей условия профессиональной деятельности // Материалы и методы инновационных исследований и разработок: сборник статей Международной научно-практической конференции: в 3 ч. Уфа: МЦИИ «Omega Science», 2016. Ч. 3. С. 49—51.

УДК 58.006

*Е. А. Борисова, В. А. Исаев***А. А. САЛЕЕВ — ВРАЧ, БИОЛОГ, КРАЕВЕД
(К 95-летию со дня рождения)**

Освещаются биография и достижения доктора медицинских наук А. А. Салеева. Известный врач-фтизиатр, работавший в Родниковском противотуберкулезном диспансере, участник Великой Отечественной войны, А. А. Салеев известен и как создатель Родниковского ботанического сада, который в 1978 г. стал памятником природы, вошел в Совет ботанических садов России. Коллекции ботанического сада насчитывали 1500 видов растений с учетом форм и сортового разнообразия.

Ключевые слова: юбилейная дата, А. А. Салеев, Родниковский ботанический сад противотуберкулезного диспансера, Ивановская область.

In the article A. A. Saleev's biographic data and materials about his main achievements are briefly reported. A. A. Saleev is a well-known phthisiatrician (TB-doctor) in Rodniki TB dispensary, Doctor of Medicine, a veteran of World War II, the founder of the botanical garden in town Rodniki. The collection of the botanical garden of Rodniki TB dispensary consisted of 1500 species (taking into account varietal diversity).

Key words: anniversary date, A. A. Saleev, Botanical Garden of Rodniki TB dispensary, Ivanovo region.

...Сочиняют не седины, а разум,
который обыкновенно с годами мужает.

М. де Сервантес.

Хитроумный идальго Дон Кихот Ламанчский

В Ивановской области в течение нескольких десятилетий работает биосферно-ноосферная научная школа, объединяющая философов и представителей различных естественных наук. В основе идей этой школы лежит исследование взаимодействия мира природы и общества, формирования ноосферного человека в конкретной природной зоне, области, районе. Одному из ярких людей нового типа, врачу, биологу и краеведу А. А. Салееву посвящена данная работа.

Важнейшей из задач оздоровления биосферы в целом является ликвидация наиболее распространенных и тяжелых заболеваний, среди которых — туберкулез. В 1975 г. считалось, что возбудителем этого заболевания инфицирована примерно половина населения Земли. Миллионы людей ежегодно заболевали, и около 3 млн человек, по данным ВОЗ, ежегодно умирали [19]. Наметившиеся в середине прошлого столетия во многих странах положительные сдвиги в борьбе с туберкулезом в настоящее время подвергаются серьезным испытаниям в связи с новой политической, экономической и экологической обстановкой в мире, в частности широким распространением СПИДа, изменением свойств возбудителей туберкулеза и ослаблением иммунитета людей вследствие экономических кризисов, миграций и др.

При решении проблемы лечения туберкулеза придавалось значение не только социальным, но природно-климатическим, а также биологическим факторам. Кроме противотуберкулезных препаратов, хороших жилищных условий, питания и покоя, в комплексном лечении туберкулеза в местах проживания больных использовалось и санаторно-курортное лечение, в котором важную роль играла здоровая окружающая среда. Объединить все оздоравливающие факторы в комплекс и успешно поддерживать его на должном уровне при малых затратах удалось нашему земляку А. А. Салееву — в небольшом городе Родники и Родниковском районе Ивановской области, благодаря собственным усилиям и небольшому коллективу единомышленников.

Краткие сведения из биографии этого человека — фронтовика, ученого-фтизиатра, создателя Родниковского ботанического сада, охраняемого ЮНЕСКО, — публиковались к его 75-летию в журнале «Проблемы туберкулеза» [2]. Результаты его исследований отражены в статьях, диссертациях на соискание ученых степеней кандидата и доктора медицинских наук, обобщены в монографии «Туберкулез и возможности его ликвидации (На модели Родниковского района Ивановской области)» [13].

Алексей Александрович Салеев родился 18 марта 1922 г. (это истинная дата, которую он отмечал, в документах была запись от 19 марта 1922 г.) в большой крестьянской семье в д. Юрцино Комсомольского района Ивановской области. Эта деревня находилась на берегу красивого озера Юрцинское (Юрцино). В 1929 г. он поступил в 7-летнюю школу, которая была в соседнем селе Седельницы. После букваря, по которому научился читать, первой его прочитанной книгой стал «Дон Кихот» М. Сервантеса. Образ благородного рыцаря вдохновил его на многие замечательные дела и сохранился у него в памяти на всю жизнь. А жизнь его перед войной была нелегкой и голодной [16]. Он учился на «отлично» и после окончания семилетки в 1936 г. продолжил обучение в средней школе в с. Писцове, которую окончил в 1939 г. и поступил в Ленинградскую военно-медицинскую академию Красной армии им. С. М. Кирова, осуществив свою мечту стать врачом. В 1941—1942 гг. ему пришлось одновременно учиться и защищать Ленинград. В 1942 г. Салеев вместе с однокурсниками был эвакуирован и заканчивать вуз ему пришлось в 1943 г. в г. Самарканде, куда академия была переведена из блокадного Ленинграда. В 1943 г. он был направлен на фронт и прошел путь от Курской дуги до Берлина. Он был сначала старшим врачом артиллерийского полка, а затем врачом-фтизиатром и начальником противотуберкулезного госпиталя для высшего командного состава в Германии. А. А. Салеев был награжден орденом Красной Звезды, орденами Отечественной войны, медалями «За оборону Ленинграда», «За взятие Варшавы» и другими наградами [2].

После комиссования по болезни в 1947 г. в звании майора медицинской службы А. А. Салеев был назначен главным врачом Родниковского противотуберкулезного диспансера, где и проработал до 2000 г. Он писал: «В Родниках прошла вся моя жизнь. Здесь я нашел свою жену, здесь родились моя дочь и внуки. Здесь дело всей моей жизни — диспансер и созданный мною ботанический сад. Родники стали местом моего становления не только как практического врача, но и как ученого... Считаю, что жизнь моя прошла не зря. Я помогал и помогаю людям вести здоровый образ жизни. А это не так уж и мало...» [16].

Начинал А. А. Салеев свою работу в качестве врача в 1947 г. с поездок к больным по деревням на велосипеде, за плечами у него был вещевой мешок с пневмотораксным аппаратом и иглами к нему, купленными в Берлине.

В те годы искусственный пневмоторакс был основным методом лечения больных и многим спас жизнь, восстановил здоровье [2].

Научные исследования А. А. Салеевым были начаты в 1950-х гг. Первые статьи были опубликованы в 1957 г. в журналах «Проблемы туберкулеза» и «Ветеринария». Его кандидатская диссертация была посвящена экссудативным плевритам, которые занимали значительное место среди заболеваний активным туберкулезом. Он внес вклад в диагностику плевритов, описал некоторые формы, предложил методику лечения, в том числе антибактериальными препаратами [12]. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата медицинских наук был издан в 1961 г. [12], а диплом кандидата наук показывает, что решением совета Отделения клинической медицины АМН СССР от 9 февраля 1962 г. ему была присуждена ученая степень кандидата медицинских наук, т. е. защита и утверждение работы происходили позже, чем указано в литературном источнике (1959 г.) [2].

В послевоенные годы, когда А. А. Салеев приехал в г. Родники, противотуберкулезных препаратов еще не было. Как опытный врач он понимал, что больному для выздоровления необходимо хорошее питание, витамины, чистый воздух. Он обратил внимание на опыт успешной ликвидации туберкулеза в сельскохозяйственном Степанаванском районе Армении в 1950—60-х гг., описанный И. М. Акопяном [1]. Родниковский район Ивановской области, где работал Салеев, был промышленным, со сложными социальными условиями. Поэтому в последующих успехах в борьбе с туберкулезом важную роль сыграло сотрудничество с отделом эпидемиологии и организации борьбы с туберкулезом Центрального института туберкулеза. Родниковский район превратился, по существу, в экспериментальный задолго до обширного эпидемиологического эксперимента республик бывшего СССР [2]. Это способствовало профессиональному и научному росту А. А. Салеева. Опыт изучения заболеваемости туберкулезом в это время в Родниковском противотуберкулезном диспансере, который уже был лучше оснащен транспортом, техникой и лекарственными препаратами, где отрабатывались экспериментальные методики оценки и изучения эпидемических показателей, позволил А. А. Салееву приступить к ликвидации туберкулеза как распространенного заболевания в Родниковском районе.

В 1966 г. Родниковский тубдиспансер был награжден Министерством здравоохранения РСФСР дипломом первой степени за эффективную лечебно-профилактическую работу в городе и сельской местности: снижение заболеваемости туберкулезом по сравнению с 1950 г. в 5 раз, смертности в 6 раз, болезненности в 3 раза и бациллярности в 2 раза, а главного врача А. А. Салеева наградили золотой медалью и поощрили денежной премией.

Докторская диссертация А. А. Салеевым была представлена к защите в 1972 г. Как и его кандидатская диссертация, она исходила с места работы автора, из практического учреждения, а не из вуза или НИИ, как это обычно бывает. Эта работа включала многие важные и новые положения. Изучение заболеваемости в Родниковском районе позволило Алексею Александровичу выявить новые грани эпидемического процесса.

Оказалось, что спад эпидемии происходит в основном за счет детей и женщин. Но было установлено, что сохраняется стабильный уровень и даже наблюдается некоторый рост заболеваний у мужчин 30—45-летнего возраста с социально отягощенным статусом (злоупотребление алкоголем и алкоголизм, пребывание в местах заключения и т. д.), у которых был диагностирован в основном бациллярный туберкулез. Об этом было не принято говорить,

и автору даже предлагалось не раскрывать в диссертации истинного состояния дел, несмотря на то что защита происходила в закрытом совете [2]. В дальнейшем эти особенности течения эпидемического процесса отмечались в других регионах СССР, а также за рубежом [11].

Защита диссертации прошла успешно, работа была утверждена решением ВАК от 28 декабря 1973 г., а 27 февраля 1974 г. А. А. Салееву был выписан диплом доктора медицинских наук. В 1975 г. по материалам своей большой и успешной работы в Родниковском районе он издал монографию «Туберкулез и возможности его ликвидации» [13]. Примечательно, что способствовал ее выходу в свет Родниковский комбинат «Большевик», который в 1929 г. строил тубдиспансер. Следует отметить, что А. А. Салеев в этой монографии одним из первых обратил внимание на сложившиеся миграционные потоки, связанные с большими текстильными производствами, и проблему «миграционного» туберкулеза, имевшего высокий удельный вес в структуре заболеваемости, и изучал возможности организации обследования флюорографом всех прибывающих на постоянное место жительства в г. Родники. Как выяснилось, именно этот контингент обследуемых «относится к числу наиболее недисциплинированных и представляет большую эпидемиологическую опасность» [13, с. 43]. Для таких лиц была разработана специальная система мер по организации учета и контроля, позволившая выявлять активный туберкулез и снизить опасность заражения населения и распространения заболевания.

В 1990-х гг., после распада СССР, Родниковскому тубдиспансеру удалось стабилизировать ситуацию с туберкулезом, а с 1995 г. диспансер начал работу по программам лечения туберкулеза, разработанным ВОЗ. В 2000 г. главный врач ушел на заслуженный отдых. К этому времени повсеместно стало увеличиваться количество устойчивых к лекарственным препаратам случаев туберкулеза, он стал активно проявляться у ВИЧ-инфицированных. С 2004 г. в Родниковском диспансере начала внедряться новая программа по лечению лекарственно-устойчивых форм туберкулеза.

К сожалению, в 2006 г. А. А. Салеев умер, а в 2012 г. стационар Родниковского противотуберкулезного диспансера был закрыт.

Одной из больших заслуг А. А. Салеева было создание в Родниках ботанического сада. Сад стал создаваться на общественных началах в 1948 г. Рядом с диспансером, где был пустырь, А. А. Салеев принялся высаживать фруктовые деревья, цветы, разбивать клумбы, увлекая своим примером сотрудников и больных, находящихся на стационарном лечении. Это была «зеленая палата» вокруг лечебного здания. Такая трудотерапия больных, пребывание на свежем воздухе способствовали их выздоровлению.

Затем стали специально выписываться семена и привозиться саженцы растений из других регионов. Планировка сада была удачно продумана, были использованы валуны, разбиты великолепные цветники, проложены дорожки. Большая роль уделялась созданию коллекции хвойных растений, которые выделяют в атмосферу фитонциды. А. А. Салеев специально заказывал семена новых растений, привозил из поездок по стране саженцы деревьев и кустарников. Постепенно вокруг диспансера создавался дендрарий. Наиболее богато были представлены растения Дальнего Востока и Юго-Восточной Азии, Северной Америки. Высаживались коллекции различных лекарственных растений.

В 1978 г. сад получил статус особо охраняемой природной территории регионального значения. В 1980-х гг. силами больных и сотрудников диспансера

была построена небольшая оранжерея. В оранжерее выращивались тропические и субтропические растения. Здесь была создана коллекция бегоний (более 50 видов), ароидных и бромелиевых. Цвели и плодоносили кофейное дерево, ананас, монстера деликатесная, лимон, апельсин, мандарин, инжир, киви, камелия японская, папайя и др. [15].

В целом на небольшой площади (3 га) удалось собрать коллекции из 1500 видов и форм, в их числе 500 видов и форм тропических и субтропических растений, большая коллекция хвойных, в том числе 40 форм туи, 5 форм тиса ягодного, 32 вида растений, занесенных в Красную книгу России [15].

Сад был включен в Совет ботанических садов России, награжден малой и большой медалями Всероссийского общества охраны природы, дипломом и медалями ВДНХ за вклад в озеленение населенных пунктов и экологическое воспитание.

В 1989—1990 гг. сад был участником I Международного экологического конкурса, где удостоен первой премии. 5—6 июня 1998 г. в саду состоялась научная сессия Совета ботанических садов центра России. Председатель Совета профессор МГУ В. С. Новиков в своем докладе дал высокую оценку деятельности сада и поздравил сотрудников с его 50-летним юбилеем.

Позднее сад был занесен в мировой каталог ботанических садов и взят на учет в ЮНЕСКО. На I Международном конгрессе ботанических садов ботаническому саду в г. Родники была присуждена первая премия, а А. А. Салееву предоставлена поездка в Великобританию, где он находился 7 дней и посетил знаменитый Королевский ботанический сад Кью в Лондоне площадью 120 га. Он писал: «...эти семь дней были чудесным, поучительным путешествием и самым дорогим экологическим подарком за наш труд, за что я искренне благодарен всем, кто к этому причастен. Хотя временами становилось грустно, что это случилось так поздно, на закате. Мне думалось, если бы это было в начале моей сознательной жизни, я стал бы несколько другим, сделал бы больше для Родины» [18].

В 1996 г. телекомпанией «Барс» был выпущен фильм о Родниковском ботаническом саду (авторы — биологи по образованию А. Худяков и О. Кашин), удостоенный на Международном кинофестивале в г. Волгограде диплома как лучший фильм по пропаганде экологических знаний.

А. А. Салеев занимался озеленением г. Родники, в скверах и вдоль улиц высаживались многие экзотические декоративные растения, например туя западная, самшит, орех маньчжурский, катальпа, барбарис корейский и др. Присутствие многих декоративных растений обогащает флору города, в составе которой к 2016 г. насчитывалось 306 видов сосудистых растений, относящихся к 5 отделам, 6 классам, 68 семействам, 172 родам [3]. Некоторые экзотические древесные растения из ботанического сада были посажены А. А. Салеевым в старинном усадебном парке в с. Батыево.

К сожалению, с 2006 г. ботанический сад закрыт для посещения. Однако его территория охраняется, уход за растениями осуществляется работниками фирмы «Артемида». В 2013 г. у растений были установлены специальные таблички с названиями и описанием их ареалов.

В июле 2014 г. в рамках программы по ведению Красной книги Ивановской области Е. А. Борисовой совместно с М. П. Шиловым и А. А. Кургановым была специально обследована территория ботанического сада (ил. 1, 2, 3). В результате здесь были найдены многие редкие для флоры Ивановской области виды [5].



Ил. 1. Родниковский ботанический сад. Главный вход (июль 2014 г.)

Было отмечено, что большинство интродуцированных растений сохраняют свои декоративные качества, успешно цветут, плодоносят, многие дают самосев. Здесь были найдены некоторые виды растений, которые впервые были отмечены как дичающие в нашем регионе [4].

Сохранились некоторые древесные растения и в оранжерее, например аукуба японская, инжир, гибискус китайский, гинго двулопастное и др.



Ил. 2. Плодоносящее дерево яблони дикушки (июль 2014 г.)



Ил. 3. Группа телекии красивой на фоне деревьев туи западной (июль 2014 г.)

Однако в целом общее состояние ботанического сада печальное. Некоторые деревья и кустарники погибли, стрижка древесных форм не производится, газоны не выкашиваются, дорожки разбиты, во многих уголках сада присутствуют заросли сорно-рудеральных растений, красивейшие экспозиции утратили свой первоначальный вид. В цветниках и под пологом деревьев

распространяются инвазионные сорняки (*Impatiens parviflora*, *Phalacrolooma septentrionale*, *Saponaria officinalis*, *Symphytum caucasicum* и др.).

Сад А. А. Салеева остался без своего создателя, а здание противотуберкулезного диспансера, относящееся к памятникам архитектуры Ивановской области, открытие которого в 1929 г. приветствовал нарком здравоохранения СССР Н. А. Семашко, постепенно разрушается.

А. А. Салеев обсуждал многие вопросы в научно-популярных журналах и СМИ. Им издана брошюра о лекарственных растениях «Для тех, кто ежедневно хочет вкуснейшее из блюд матери-природы» [14]. Он проводил многочисленные экскурсии по ботаническому саду, с большой любовью рассказывал молодежи, школьникам и студентам, жителям г. Родники о растениях и их полезных свойствах. Традиционными были занятия в саду по биологии и экологии на курсах повышения квалификации учителей из Ивановской области.

В заключение отметим, что опыт доктора А. А. Салеева в деле успешной ликвидации туберкулеза как распространенного заболевания при сочетании медицинских и биологических подходов на конкретной территории Родниковского района представляет значительный интерес с экологических инновационных позиций. Он может быть использован в регионах с разной природно-климатической и социальной обстановкой, при разных исходных уровнях медицинского обслуживания как модель для борьбы с аналогичными инфекционными заболеваниями.

А. А. Салеев составил славу и гордость Родниковского тубдиспансера и туберкулезной службы Ивановской области. Он также занимался общественной работой, в течение 30 лет был депутатом городского Совета. Стал почетным гражданином г. Родники, по инициативе администрации области был занесен в энциклопедию «Лучшие люди России». Несмотря на неоднократные приглашения на престижные должности в Москве, на заведование кафедрами туберкулеза в Ивановском, Калининском, Ярославском мединститутах, он оставался верен своему городу [10, с. 57—58].

А. А. Салеев был замечательным краеведом и борцом за сохранение особо охраняемых природных территорий, памятников истории и культуры в Родниковском районе. Достаточно вспомнить, как он рассказывал об усадьбах в селах Батыеве и Филисове и исторических личностях, которые там жили и бывали. Так, например, земли, где находится сейчас с. Батыево, после Куликовской битвы «были пожалованы князю Боброку-Волынскому как герою этой битвы, который был воеводой в засадном полку, решившем участь сражения, а также родственником Дмитрия Донского (был женат на его сестре)» [17].

Личность А. А. Салеева, соединившего знания и опыт Асклепия с красотой и пользой Флоры, уникальна. Он останется в памяти всех, кто его знал, примером верного служения Отечеству, врачеванию и биологии, своему краю. Такие люди рождаются редко. Подобно ему, беречь и охранять здоровье могут и должны биологи и врачи, лечащие человека и животных. Для этого необходимо включение в проекты организации новых медицинских и образовательных учреждений «островков оздоровления биосферы» — зон зеленой терапии (сады, оранжереи, уголки живой природы), создание образовательных программ и курсов по био- и экотерапии, сочетающих фундаментальные разработки и научные идеи классических университетов, медицинских и сельскохозяйственных вузов. Слово «экология» в переводе с греческого буквально означает «наука о доме, жилище, родине». Наш дом, наша малая и большая Родина нуждаются в защите. Ивановская область и Ивановский

государственный университет в последние годы уже не раз выступали инициаторами программных идей по экологическому образованию и природолюбию [6, 7], формированию «культуры бережного отношения к природе в течение всей жизни каждого человека» [9, с. 28]. Пример доктора А. А. Салеева показывает, как много может сделать для нашего дома даже один талантливый человек. Сейчас нужны новые яркие личности, те, кто сохранит «пусть и скромную, но поразительную по фантазии, удивительно богатую оттенками, неяркую красоту средней России» [8, с. 2].

Библиографический список

1. Акоюн И. М. Возможности ликвидации туберкулеза как распространенного заболевания в масштабе района : автореф. дис. ... д-ра мед. наук. Тбилиси, 1966.
2. Алексей Александрович Салеев : (к 75-летию со дня рождения) // Проблемы туберкулеза. 1997. № 6. С. 70—71.
3. Борисова Е. А. Флора г. Родники Ивановской области // Экологическое краеведение : материалы III Всероссийской научно-практической конференции (г. Ишим, 16 апреля 2016 г.). Ишим : Ишимский пед. ин-т им. П. П. Ершова, 2016. С. 10—14.
4. Борисова Е. А., Курганов А. А. Новые и редкие виды растений Ивановской области // Ботанический журнал. 2015. Т. 100, № 5. С. 504—507.
5. Борисова Е. А., Курганов А. А., Шилов М. П., Мишагина Д. А. Новые материалы о редких видах флоры Ивановской области // Фиторазнообразие Восточной Европы. 2015. Т. 9, № 2. С. 89—99.
6. Зотов В. В., Исаев В. А. Размышления о Природолюбии и «Природолюбии без границ» // Педагогическое образование и наука. 2003. № 4. С. 32—35.
7. Исаев В. А. Формирование культуры взаимоотношений природы и человечества. Иваново : Иван. гос. у-т, 2005. Ч. 1 : Естественно-научные грани природолюбия. 48 с.
8. Исаев В. А. Зеркало души и красоты // Экологический вестник. 2007. № 2/2 : Ивановский регион. С. 2.
9. Исаев В. А. Красная книга Ивановской области: в период между изданиями // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2012. Вып. 2. С. 25—28.
10. Макарьянц Л. Н. Длинною в век : (история фтизиатрической службы города Иваново и Ивановской области). Иваново, 2006. 72 с.
11. Рудой Н. М., Чубаков Т. Ч. Туберкулез легких и алкоголизм. М. : Медицина, 1985. 176 с.
12. Салеев А. А. Экссудативный серозный плеврит по наблюдениям районного противотуберкулезного диспансера : автореф. дис. ... канд. мед. наук. Родники, 1961. 13 с.
13. Салеев А. А. Туберкулез и возможности его ликвидации : (на модели Родниковского района Ивановской области). Ярославль, 1975. 348 с.
14. Салеев А. А. Для тех, кто ежедневно хочет вкуснейшее из блюд матери-природы. Иваново, 1994. 20 с.
15. Салеев А. А., Морозова Е. Н., Шевчук В. Г. Ботанический сад — база лечения больных, экологического воспитания и образования учащихся и взрослого населения // Ботанические сады России: история, место и роль в развитии современного общества. Соликамск : Изд-во Соликам. гос. пед. ун-та, 2001. С. 43—45.
16. URL: http://muzeypiscowa.ucoz.ru/blog/k_90_letiju_so_dnja_rozhdenija_a_a_saleeva_1922_2006_gg/2012-03-15-30 (дата обращения: 04.02.2017).
17. URL: <http://www.saleev.rodniki.ru/index.php?p=mesta> (дата обращения: 12.08.2009).
18. URL: <http://www.saleev.rodniki.ru/index.php?p=pressa2> (дата обращения: 12.08.2009).
19. URL: <http://www.who.int/mediacentre/factsheets/fs104/ru/> (дата обращения: 04.02.2017).

УДК 58.006

И. Н. Борисова, Н. Н. Степанова

ПРИМУЛЫ БОТАНИЧЕСКОГО САДА ИВАНОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Приведены данные о растениях рода *Primula* L., рассматривается их агротехника, использование в ботаническом саду Ивановского государственного университета.

Ключевые слова: *Primula*, виды, семейство *Primulaceae* Vent., ботанический сад.

Provided are the data on the plants of the genus *Primula* L., agricultural machinery, the use of the botanical garden of Ivanovo State University.

Key words: *Primula*, species, family *Primulaceae* Vent., botanical garden.

Цель и задачи работы — на основе собственных наблюдений и данных литературных источников охарактеризовать растения рода *Primula* L., произрастающие в условиях ботанического сада ИвГУ; оценить их возможности для хозяйственного применения (декоративные, лекарственные и др.); выявить перспективные виды растений данного рода и направления их дальнейшего использования в ландшафтном строительстве.

Примула — самый крупный род семейства *Primulaceae* Vent., насчитывающий по оценкам разных специалистов от 500 до 800 видов. Виды первоцветов очень разнообразны по своей экологической приуроченности и встречаются на обширных территориях — от равнин до самых верхних высотных поясов гор.

Систематика и филогения рода, несмотря на многочисленные фундаментальные работы, до сих пор не нашли однозначного решения [1, 5].

По состоянию на 1 декабря 2016 г. коллекции растений ботанического сада ИвГУ насчитывали 1872 вида, формы и сорта высших растений, принадлежащих к 486 родам и 125 семействам¹. Семейство *Primulaceae* представлено одним родом *Primula*, включающим 8 видов и форм (таблица). Единая экспозиция растений данного рода по объективным причинам не формируется: все представители органично встроены в существующие на территории ботанического сада экспозиции и отделы в соответствии с экологическими требованиями видов данной группы.

Род *Primula* подразделяется на подроды и, в зависимости от морфологических особенностей, на секции [5]. Согласно данной классификации *Primula* в ботаническом саду представлена:

- 1) секцией примулы: *Primula veris* L., *P. woronowii* Losinsk;
- 2) секцией Юлии: *P. juliae* Kusn., *P. × pruhoniana* hort.;
- 3) секцией зубчатоллистные примулы: *P. denticulata* Smith. (ил. 1), *P. denticulata* var. *alba*;
- 4) секцией аурикуластрум (подсекция аурикулы): *P. auricula* L. (ил. 2).

Классификация видов, сортов и гибридов по форме и расположению соцветий или цветков на растениях позволяет распределить примулы ботанического сада по группам.

© Борисова И. Н., Степанова Н. Н., 2017

¹ См. отчет ботанического сада ИвГУ по НИР за 2016 г., направленный в Совет ботанических садов России, Белоруссии и Казахстана.

1. Подушечковидные — цветки одиночные, каждый на собственном коротком цветоносе, чуть возвышающемся над розеткой листьев. Это *P. juliae*, *P. woronowii*, *P. × pruhoniana*, *P. vulgaris*.

2. Зонтиковидные — цветки собраны в односторонний или круглый зонтик, возвышающийся над розеткой листьев на цветоносе высотой до 20 см. К данной группе относятся *P. auricula*, *P. veris*.

3. Головчатые, или шаровидные, — цветки собраны в плотные головчатые соцветия на крепком цветоносе, высота которого в период цветения составляет 15—20 см, а в период плодоношения — 30—45 см. В нашем случае это *P. denticulata*, *P. denticulata var. alba*.

В январе 2017 г. заложены на стратификацию семена *P. japonica hort.* ‘Канделябр’. Растения этого сорта будут относиться к 4-й группе — ярусовидные, или канделябровидные, примулы, цветки которых собраны в мутовчатые соцветия, состоящие из нескольких ярусов, расположенных на прочных цветоносах высотой 35—40 см.

Представители колокольчиковидных примул в ботаническом саду отсутствуют.

По срокам цветения предварительно выделены:

— ранневесенние виды (*P. vulgaris*, *P. juliae*);

— весенние (*P. denticulate*, *P. denticulata var. alba*, *P. veris*, *P. woronowii*);

— поздневесенние (*P. auricula*, *P. × pruhoniana*).

Данные литературы и собственные многолетние наблюдения свидетельствуют, что именно представители растений данного рода одними из первых набирают бутоны и своим цветением, а также долгим сохранением зеленой листвы обеспечивают непрерывность декоративности клумб в течение всего вегетационного сезона.

Результаты инвентаризации по семейству *Primulaceae* (2016 г.) приведены в таблице.

Из нее видно, что в природных условиях большинство примул произрастают под пологом деревьев, кустарников или с северной стороны гор и предгорий на достаточно увлажненных, слабокислых, плодородных почвах. *Primula denticulata*, *P. denticulata var. alba*, *P. auricula* встречаются на известняковых скалах.

Данные дипломных работ, выполненных в 2013—2015 гг., позволяют сделать вывод, что почвы в ботаническом саду являются легкосуглинистыми по механическому составу, слабокислыми (актуальная кислотность 6,65—6,75, обменная кислотность 5,75—5,76), малогумусными (содержание гумуса равно 4,3 %), обладают умеренным эффективным и потенциальным плодородием [4]².

Недостаточное содержание азота в почве и проблемы с поливом выступают сдерживающими факторами для роста и развития растений в ботаническом саду. Поэтому виды рода *Primula* высажены рядом с хвойными культурами, гортензиями, Венериным башмачком настоящим (*Cipripedium calceolus* L.), которые регулярно снабжаются водой и подкормками из органических удобрений. Все растения находятся в хорошем состоянии.

² См. также дипломную работу А. В. Парфеновой «Проект коллекционного участка рододендронов на территории ботанического сада ИвГУ», выполненную на кафедре ботаники и зоологии биолого-химического факультета под руководством кандидата биологических наук И. В. Сеньюшкиной (2015 г.).

Семейство *Primulaceae* в коллекциях ботанического сада ИВГУ

Название	Дата поступления	Местонахождение	Родина	Срок цветения
<i>P. juliae</i> Kuhn. — примула Юлии (1-й образец)	До 2004 г. (происхождение неизвестно)	Газон перед административным зданием ботанического сада	Кавказ (лесной пояс)	2-я декада апреля — 2-я декада мая
<i>P. vulgaris</i> Huds. — примула обыкновенная (синоним: <i>P. acaulis</i> Hill. — бесстебельная)	2007 г. (источник поступления неизвестен)	Выставочная экспозиция у сирени (учебный корпус № 3)	Крым, Кавказ, Южная и Средняя Европа (опушки лиственных лесов, альпийские луга)	2-я декада апреля — 3-я декада мая
<i>P. juliae</i> Kuhn. sp. — примула Юлии (2-й образец)	2008 г. (частная коллекция И. В. Чекан)	Экспозиция декоративно-лиственных растений (восточная сторона здания ботан. сада)	Кавказ (лесной пояс)	2-я декада апреля — 2-я декада мая
<i>P. denticulata</i> Smith. — примула мелкозубчатая	2008 г. (частная коллекция; 1 экз.)	Миксбордер с хвойными перед теплицей	Гималаи, Китай, Дальний Восток (горные луга)	3-я декада апреля — 2-я декада мая
<i>P. veris</i> L. — примула весенняя (1-й образец)	2012 г. (Иван. обл. центр развития дополнит. образования детей; 1 экз.)	Отдел хвойных растений	Европа (лесная и лесостепная зона)	3-я декада апреля — 2-я декада мая
<i>P. auricula</i> L. — примула ушковая	2012 г. (частная коллекция; 1 экз.)	Отдел декоративно-лиственных растений (восточная сторона сирени)	Южная и Средняя Европа (горы, альпийские луга)	1-я декада мая — 1-я декада июня
<i>P. denticulata</i> var. <i>alba</i> — примула мелкозубчатая с белыми цветками	2012 г. (частная коллекция И. В. Чекан; 1 экз.)	Отдел декоративно-лиственных растений (восточная сторона сирени)	Гималаи, Китай, Дальний Восток (горные луга)	3-я декада апреля — 2-я декада мая
<i>P. woronowii</i> Losinsk — примула Воронова	2015 г. (Ботан. ин-т РАН им. В. Л. Комарова; 3 экз.)	Экспозиция «Средиземноморский сад»	Кавказ (лесной пояс)	3-я декада апреля — 3-я декада мая
<i>P. × pruhoniciana</i> Zeeman ex Bergmans — примула пругоницкая	2015 г. (Ботан. ин-т РАН им. В. Л. Комарова; 3 экз.)	Перед теплицей	Межвидовой гибрид <i>P. Juliae</i> , <i>P. Veris</i> , <i>P. Vulgaris</i> , <i>P. elatior</i>	1-я декада мая — 3-я декада мая
<i>P. veris</i> L. — примула весенняя (2-й образец)	12.09.2015 г. (Поволж. гос. технол. ун-т, Йошкар-Ола; 2 экз.)	Отдел редких и охраняемых растений (перед беседкой)	Европа (лесная и лесостепная зона)	3-я декада апреля — 2-я декада мая



Ил. 1. *P. denticulata* Smith. — примула мелкозубчатая



Ил. 2. *P. auricula* L. — примула ушковая

Отметим, что ряд видов рода *Primula*, представленных в коллекциях ботанического сада ИвГУ, относятся к редким, нуждающимся в охране растениям. Вид *P. juliae* включен как в Красную книгу РФ [3], так и в региональную Красную книгу [2]; вид *P. veris* также включен в Красную книгу Ивановской области [2].

Таким образом, можно сделать следующие выводы.

1. Представленные виды рода *Primula* в условиях ботанического сада ИвГУ зарекомендовали себя как морозостойкие, свето- и теневыносливые, малоуходные, устойчивые к болезням и вредителям.

2. К достоинствам относится высокая декоративность в весенний период цветения представителей *P. vulgaris*, *P. juliae*, *P. denticulate*, *P. denticulata* var. *alba*, *P. woronowii*, *P. auricula*, *P. × pruhoniana* и сохранение декоративной листвы в течение вегетационного периода.

3. *P. veris* и *P. juliae* имеют региональные охранные статусы, а вид *P. juliae* включен в Красную книгу РФ.

Наблюдения за ритмом роста и развития растений рода *Primula* ботанического сада ИвГУ будут продолжены.

Библиографический список

1. Астамирова М. А.-М. Инвентаризация и анализ рода *Primula* L. (*Primulaceae* Vent.) Терского Кавказа и Дагестана : автореф. дис. ... канд. биол. наук. Астрахань, 2010. URL: <http://www.dissercat.com/content/inventarizatsiya-i-analiz-roda-primula-l-primulaceae-vent-terskogo-kavkaza-i-dagestana> (дата обращения: 01.02.2017).
2. Красная книга Ивановской области / под ред. В. А. Исаева. Иваново : ПресСто, 2010. Т. 2 : Растения и грибы. 192 с.
3. Красная книга России : растения. URL: <http://biodat.ru/db/rbp/rb.php?src=1&vid=376> (дата обращения: 01.02.2017).
4. Мокеева С. С. Формирование коллекции многолетних декоративно-лиственных растений в ботаническом саду ИвГУ // Молодая наука в классическом университете : тезисы докладов научных конференций фестиваля студентов, аспирантов и молодых ученых, Иваново, 22—26 апреля 2013 г. : в 7 ч. Иваново : Иван. гос. ун-т, 2013. Ч. 1 : Актуальные проблемы естествознания. С. 23.
5. Электронная энциклопедия садовых декоративных растений. URL: <http://flower.onego.ru/other/primula.html> (дата обращения: 01.02.2017).

ЭФИРОМАСЛИЧНЫЕ КУЛЬТУРЫ В БОТАНИЧЕСКОМ САДУ ИВАНОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Приведены данные об эфиромасличных растениях, содержащихся в коллекциях ботанического сада Ивановского государственного университета.

Ключевые слова: эфиромасличные, пряно-вкусовые, лекарственные растения, систематический состав коллекции, ботанический сад.

Provided are the data about the essential oil-bearing plants which can be found in collections of botanical garden of Ivanovo State University.

Key words: essential oils plants, pot herbs, medicinal herbs, systematic structure of collection, botanical garden.

Эфиромасличные растения использовались человечеством с древнейших времен. Эта группа растений содержит в особых клетках (эфиромасличных ходах) или в железистых волосках пахучие эфирные масла — летучие соединения, практически не растворимые в воде. Они представляют собой сложные смеси различных органических соединений терпенов, спиртов, альдегидов, кетонов [4].

Способность вырабатывать эфирные масла отмечена более чем у 3 тыс. видов растений, относящихся к семействам *Umbelliferae*, *Labiatae* и др. Промышленное значение имеют во всем мире около 200 видов. Ассортимент эфиромасличных растений, выращиваемых в Нечерноземной зоне, очень беден, хотя многие из данных культур с успехом возделываются в качестве пряно-вкусовых [5].

Эфиромасличными эти растения стали называться в XIX в., когда из них начали получать пахучие вещества в промышленных масштабах, прежде всего эфирные масла (ЭМ). Наибольшее количество ЭМ содержится в цветках и плодах, меньше их — в листьях, стеблях и подземных органах. Аромат и вкус растений зависят от наличия в них ЭМ, алкалоидов и глюкозидов.

Эфиромасличные растения находят применение в парфюмерной, фармацевтической, консервной, мыловаренной, кондитерской, ликеро-водочной промышленности в качестве пряно-ароматических и пряно-вкусовых добавок и отдушек. Кроме того, многие из них являются медоносами, красивоцветущими и используются для защиты культурных растений от вредителей и болезней [3]. Пряные свойства растений зависят от содержания в них соответствующих химических соединений (алкалоидов, глюкозидов и эфирных масел). Накопление и химический состав масла в разных фазах вегетации растения также различны.

Например, листья и зрелые семена кориандра посевного (*Coriander sativum* L.) содержат от 0,2 до 1,0 % ЭМ, в состав которого входят линалоол и терпены, определяющие ароматические и вкусовые качества этого растения. Иссопу лекарственному (*Hyssopus officinalis* L.) ЭМ (до 0,9 %) придают горьковато-пряный вкус и сильный аромат с ноткой камфоры или муската [1]. Корневище аира обыкновенного (*Acorus calamus* L.) содержит до 5 % ЭМ, в состав которого входят флавоноиды. Благодаря ЭМ (от 1 до 1,5 %) базилик

обыкновенный (*Ocimum basilicum* L.) объединяет запахи гвоздики, лаврового листа, душистого перца и мяты. Наибольший выход масла наблюдается в фазе полного цветения. Семена содержат от 12 до 20 % жирного масла. Надземную часть тагетеса отклоненного (*Tagetes patula* L.; от 0,3 до 0,55 % ЭМ) применяют в производстве восточных сладостей, ликеро-водочной, мыловаренной и парфюмерно-косметической промышленности. Для борьбы с нематодами картофеля, земляники и других культур *Tagetes patula* высаживают по краям гряд. Корневище валерианы лекарственной (*Valeriana officinalis* L.) содержит от 0,5 до 2 % ЭМ, его максимальное количество отмечается в период весенней вегетации; в семенах обнаружено от 15 до 20 % жирного масла. Характерный пряный запах и острый вкус лапчатки прямостоячей (*Potentilla erecta* (L.) Raeusch; 0,6—1,0 % ЭМ) напоминает имбирь. Семена горчицы полевой (*Sinapis arvensis* L.) содержат от 16,5 до 38,5 % жирного масла. В состав чесночных ЭМ всех частей гусиного лука желтого (*Gagea lutea* (L.) Ker-Gawl.) входит сера. Содержание ЭМ в надземной части душицы обыкновенной (*Origanum vulgare* L.) колеблется в пределах 0,5—1,5 %, его основным компонентом является тимол (20—45 %) [2].

Кроме традиционного применения эфиромасличных растений в парфюмерном производстве и пищевой промышленности, все шире они используются в качестве лекарственных средств. Динамично развивается новое направление в медицине — ароматерпия, лечение с помощью ЭМ. Как показали лабораторные исследования и клинические испытания, этот класс терпеноидных соединений очень перспективен для лечения заболеваний органов дыхания, нервной системы и борьбы с госпитальными инфекциями.

Интродукция эфиромасличных растений в ботаническом саду ИвГУ началась в 1991—1993 гг. В дипломной работе Т. В. Разиной (1993 г.), выполненной под руководством профессора З. С. Акимцевой, были изучены семенная продуктивность, динамика роста, фенофазы этих растений на примере кресс-салата, фенхеля обыкновенного, тмина обыкновенного, кориандра посевного, тимьяна ползучего. Ароматические растения ботанического сада, г. Иваново и Ивановской области изучались в 2006 г. студентами А. А. Анисимовой, М. Н. Марковой, А. Л. Лаптевой. В дипломных работах Д. Н. Воронина (2008 г.), А. А. Удаловой (2009 г.) и В. Н. Пасюта (2011 г.) при разработках проекта экспозиции «Аптекарский огород» в ассортименте растений широко использовались эфиромасличные.

В 2015—2016 гг. благодаря сотрудничеству с другими ботаническими садами и частными коллекционерами значительно пополнился видовой состав эфиромасличных растений в ботаническом саду ИвГУ.

Систематический состав коллекции приведен в таблице.

Анализ данных таблицы позволяет сделать следующие выводы.

1. В коллекции ботанического сада на декабрь 2016 г. содержалось 33 семейства эфиромасличных растений;

2. Прослеживается положительная динамика увеличения видового состава коллекции: 1993 г. — 3 семейства, 5 родов, 5 видов; 2015 г. — 154 вида, формы и сорта, относящихся к 67 родам из 33 семейств; 2016 г. — 195 видов, форм и сортов, относящихся к 69 родам из 33 семейств.

3. Наибольшим числом видов, форм и сортов на декабрь 2016 г. были представлены следующие семейства: *Alliaceae* (26), *Labiatae* (41), *Geraniaceae* (22), *Compositae* (19), *Umbelliferae* (23), *Solanaceae* (12), *Grossulariaceae* (10).

**Систематический состав коллекции эфиромасличных культур
в ботаническом саду ИвГУ по данным инвентаризации 2015—2016 гг.**

Семейство	Количество родов		Количество видов		Количество форм, сортов		Всего видов, форм и сортов	
	2015 г.	2016 г.	2015 г.	2016 г.	2015 г.	2016 г.	2015 г.	2016 г.
1. <i>Alliaceae</i>	2	2	12	20	8	10	16	26
2. <i>Anacardiaceae</i>	1	1	1	1	–	–	1	1
3. <i>Araceae</i>	1	1	1	1	1	1	2	2
4. <i>Betulaceae</i>	1	1	2	2	3	4	3	4
5. <i>Boraginaceae</i>	1	1	1	1	–	–	1	1
6. <i>Cannabiaceae</i>	1	1	1	1	–	–	1	1
7. <i>Caprifoliaceae</i>	2	2	2	2	1	2	3	4
8. <i>Chusiaceae</i>	1	1	2	3	–	–	2	3
9. <i>Compositae</i>	9	9	12	12	5	9	16	19
10. <i>Cornaceae</i>	1	1	1	1	–	–	1	1
11. <i>Crassulaceae</i>	1	1	1	1	–	–	1	1
12. <i>Cruciferae</i>	3	3	3	3	–	–	3	3
13. <i>Cupressaceae</i>	1	1	1	1	–	–	1	1
14. <i>Elaeagnaceae</i>	–	1	–	1	–	–	–	1
15. <i>Fabaceae</i>	2	2	2	2	–	–	2	2
16. <i>Geraniaseae</i>	2	2	5	5	12	19	15	22
17. <i>Grossulariaceae</i>	1	1	2	2	9	9	10	10
18. <i>Iridaceae</i>	1	1	1	1	–	–	1	1
19. <i>Juglandaceae</i>	1	1	3	3	–	–	3	3
20. <i>Labiatae</i>	13	13	21	27	15	19	31	41
21. <i>Liliaceae</i>	1	1	1	1	–	–	1	1
22. <i>Malvaceae</i>	1	1	1	1	–	–	1	1
23. <i>Polygonaceae</i>	2	1	2	1	4	1	4	1
24. <i>Portulacaceae</i>	1	1	–	1	–	1	–	1
25. <i>Primulaceae</i>	1	1	1	1	–	–	1	1
26. <i>Rosaceae</i>	1	1	1	1	–	–	1	1
27. <i>Rutaceae</i>	2	2	2	2	–	–	2	2
28. <i>Saxifragaceae</i>	1	1	1	1	–	–	1	1
29. <i>Schisandraceae</i>	1	1	1	1	–	1	1	2
30. <i>Solanaceae</i>	2	2	2	2	7	11	8	12
31. <i>Staphyleaceae</i>	–	1	–	1	–	–	–	1
32. <i>Umbelliferae</i>	6	7	9	10	11	13	20	23
33. <i>Valerianaceae</i>	1	1	1	1	–	–	1	1
<i>Всего</i>	65	67	96	114	76	100	154	195

Изучение особенностей роста и развития эфиромасличных растений, увеличение видового и сортового состава коллекции в ботаническом саду ИвГУ будут продолжены.

Библиографический список

1. Бруннек Н. И. Овощная кулинария от А до Я. М. : Экономика, 1991. 335 с.
2. Дудченко Л. Г., Козьяков А. С., Кривенко В. В. Пряно-ароматические и пряно-вкусовые растения : справочник. Киев : Наук. думка, 1989. 304 с.
3. Маланкина Е. Л. Агробиологическое обоснование повышения продуктивности эфиромасличных растений из семейства яснотковые (Lamiaceae L.) в Нечерноземной зоне России : автореф. дис. ... канд. с.-х. наук. М., 2007. URL: <http://www.dissercat.com/content/agrobiologicheskoe-obosnovanie-povysheniya-produktivnosti-efiromaslichnykh-rastenii-iz-semei> (дата обращения: 01.02.2017).
4. Назаренко Л. Т., Бугаенко Л. А. Эфиромасличные, пряно-ароматические и лекарственные растения. Симферополь : Таврия, 2003. 202 с.
5. Оголовец Г. С. Энциклопедический словарь лекарственных, эфиромасличных и ядовитых растений. М. : Сельхозгиз, 1951. 486 с.

УДК 598.279.24

В. Н. Мельников, Д. Е. Чудненко**ОБЗОР ДНЕВНЫХ ХИЩНЫХ ПТИЦ ИВАНОВСКОЙ ОБЛАСТИ**

Статья, являющаяся продолжением серии «Обзор птиц Ивановской области», основана на материалах 35-летних исследований дневных хищных птиц указанного региона. Представлен обзор современного состояния распределения численности и ее динамики для всех 25 видов соколообразных, отмеченных на территории Ивановской области.

Ключевые слова: дневные хищные птицы, фауна, распределение, численность, динамика численности, Ивановская область.

The presented article is a continuation of the series «A review of the Ivanovo region birds». This work is based on materials of 35 years of studies of raptors of the region. The article presents an overview of the current state of the distribution of population and its dynamics for all 25 species of birds of prey, which could be found on the territory of the Ivanovo region.

Key words: raptors, birds of prey, fauna, distribution, abundance, population dynamics, Ivanovo region.

Дневные хищные птицы (Соколообразные (*Falconiformes*) в традиционной системе животного мира, Ястребообразные (*Accipiteriformes*) и Соколообразные в ныне принятой систематике) в Ивановской области являются наиболее изученной группой птиц. Мы в данном обзоре традиционно, наряду с термином «дневные хищные птицы», используем термин «соколообразные» как синоним.

Направленное изучение дневных хищных птиц Ивановской области начато на кафедре зоологии Ивановского государственного университета в 80-х гг. С. В. Буслаевым и Е. М. Кудашевой под руководством С. А. Хелевиной. В этот период была произведена первая оценка численности соколообразных в регионе [40] и начато изучение особенностей экологии обыкновенного канюка, в первую очередь его трофических связей [39]. Основные

исследования пернатых хищников конца 1980-х — начала 1990-х гг. велись на базе Красногорского стационара Ивановского государственного университета — в северной части Ивановской области, в пределах Стиберского охотничьего хозяйства, в заволжской части Кинешемского р-на [3, 41]. С середины 1990-х гг. ведутся более широкие полевые выезды по всей территории области, при этом продолжены и стационарные работы. Материалы этих исследований позволили провести оценку численности дневных хищных птиц области по состоянию на конец 1990-х [12, 29] и 2000-х гг. [13], рассмотреть особенности фауны и населения соколообразных на побережьях Горьковского водохранилища [47], вдоль долины р. Теза [28], в Приволжском р-не и его окрестностях [5, 6], проследить динамику численности хищных птиц на Красногорском стационаре [11, 27], в Клязьминском заказнике [7, 26, 27, 38], в северной части Балахнинской низины [44], в центральной аграрной части региона [42], в окрестностях спортивно-оздоровительного лагеря ИВГУ «Рубское озеро» [43]. Также проведены специальные работы по изучению особенностей распространения и экологии обыкновенного канюка [23], черного коршуна [19], ястреба-тетеревятника [22], большого и малого подорликов [24, 48, 50], скопы [16], орлана-белохвоста, змеяда [30], дербника [45], и других соколов [14]. Большое внимание уделяется редким и исчезающим видам хищных птиц [17, 21, 46]. Это направление реализуется в ходе работ по ведению Красной книги Ивановской области [8], в частности, издано три выпуска материалов по ее ведению [34, 32, 33]. Эти и другие опубликованные материалы, а также новые результаты наших исследований, личные сообщения коллег и фотоанималистов легли в основу данного обзора.

На территории Ивановской области зарегистрировано 25 видов дневных хищных птиц, у 21 из них известно или предполагается место гнездования, 1 вид встречается только на пролете и зимовке, у 3 видов известны единичные залеты.

Скопа (*Pandion haliaetus*). Редкий гнездящийся перелетный вид. Занесена в Красную книгу РФ [9] и Красную книгу Ивановской области с категорией 1 — вид, находящийся под угрозой исчезновения [8]. В середине XX в. пережила глубокую депрессию численности, в начале XXI в. отмечается стабилизация и некоторый рост. В настоящее время наблюдается увеличение численности скопы на побережьях крупных рек и водохранилищ, в первую очередь — на Горьковском водохранилище и его отрогах (приустьевых расширениях русел притоков Волги). Появилась скопа на р. Клязьма, Лух, Елнать, Увдовском водохранилище. В пределах Ивановской области современная численность оценивается в 20—25 гнездящихся пар [16].

Осоед (*Pernis apivorus*). Немногочисленный гнездящийся перелетный вид. Численность обыкновенного осоеда в регионе имеет выраженный положительный тренд. Увеличение или, по крайней мере, стабильная численность наблюдается на всех мониторинговых участках [7, 42, 44]. Рост численности, по всей видимости, связан с увеличением общей численности общественных ос, поселяющихся на зарастающих участках сельхозугодий и вырубках. Продолжительное жаркое лето в последние годы также положительно сказывается на численности ос. На основании данных о росте численности вида, обыкновенный осоед по нашему предложению был исключен из Красной книги Ивановской области [18]. Современную численность осоеда можно оценить в 500—600 гнездящихся пар.

Черный коршун (*Milvus migrans*). Немногочисленный гнездящийся перелетный вид. Характеризуется крайне неравномерным распространением, динамика его численности в разных типах местообитаний может быть разнонаправленной. Гнездовые группировки коршуна остаются относительно стабильными на побережье Горьковского водохранилища и в поймах крупных и средних рек, достигая в пойме р. Клязьма плотности населения 20—25 пар/100км² [26, 38]. При этом вид стал встречаться реже на плакорных участках, где заброшена значительная часть сельхозугодий. На территориях, где восстанавливается сельское хозяйство, и особенно вблизи появившихся местных мелких предприятий мясного производства, плотность населения черного коршуна заметно возросла [42]. В Балахнинской низине численность коршуна сильно сократилась после пожаров 2002—2003 гг.; восстанавливаться она начала во втором десятилетии XXI в., причем крупные пожары 2010 г. не оказали заметного влияния на численность вида [46]. В конце лета — начале осени коршуны концентрируются в местах проведения сельхозработ, образуя стаи от 10—15 до нескольких десятков птиц, в отдельных случаях достигая численности до 150—200 особей. Общая численность вида в Ивановской области составляет 600—800 гнездящихся пар.

Полевой лунь (*Circus cyaneus*). Немногочисленный гнездящийся перелетный вид. Наблюдается рост численности полевого луня на многих территориях региона. Адаптация к гнездованию на зарастающих вырубках [2] позволила виду значительно увеличить численность. Например, на стационаре «Каминский» в центральной аграрной части Ивановской области численность полевого луня за 15 лет (с 2000 до 2014 г.) возросла почти на порядок — от 0,9 до 8 пар/100км² [42]. Рост численности полевого луня отмечается и на других мониторинговых площадках — в окрестностях оз. Рубское, в северной части Балахнинской низины [7, 44, 46]. В. В. Гриднева (личное сообщение), изучая население птиц на вырубках, неоднократно отмечала гнездование полевого луня на обследованных площадках. В связи с наблюдаемым увеличением численности полевой луни был выведен из Красной книги Ивановской области [18]. Однако есть свидетельства и о сокращении численности полевого луня на некоторых прилегающих территориях, в частности на территории Владимирской области, включая Владимирское ополье, где до 2000-х гг. вид оставался обычным [36]. Общую численность вида на территории Ивановской области можно оценить в 500—600 пар.

Степной лунь (*Circus macrourus*). Очень редкий, вероятно гнездящийся, перелетный вид, занесен в Красную книгу РФ [9] и Красную книгу Ивановской области [8]. С 1990-х гг. регулярно отмечаются гнездовые инвазии в Нечерноземном центре России [25]. Первые встречи со степным лунем в регионе отмечены нами на границе Ивановской и Владимирской областей, на севере Ковровского р-на, осенью 2003 г., Г. С. Ерёмкиным — весной 2004 г. [35]. В гнездовой период вид отмечался в 2007 г. вблизи г. Вичуга и в 2011 г. в Ильинском р-не [18]. В Родниковском р-не степной луни отмечался в период послегнездовых кочевок в августе 2015 г. у с. Острецово [42]. В 2016 г. на той же территории в гнездовой период неоднократно встречались взрослый и полувзрослый (2-й календарный год) самцы. 24 апреля 2016 г. минимум четыре особи степного луня — три самца и самка — встречены в окрестностях пос. Постнинский. Мы предполагаем гнездование отдельных пар на территории Ивановской области.

Луговой лунь (*Circus pyargus*). Немногочисленный гнездящийся перелетный вид. Включен в Приложение к Красной книге Ивановской области [8] как вид, требующий особого внимания. В 1990-х — начале 2000-х гг. наблюдался устойчивый рост численности в связи с адаптацией к массовому гнездованию в зарослях рудеральной растительности — больших крапивных выделах, которые сформировались вокруг малоиспользуемых и заброшенных ферм, складов удобрений и т. п. [2].

Подъем численности, отмеченный на рубеже веков, закончился, и после стабилизации наступил ожидаемый спад. Количество и площади территорий с рудеральной растительностью закономерно сократились, и луговые луны потеряли значительную часть гнездовых участков, что привело к перераспределению птиц и некоторому снижению численности. Такая динамика отмечена на территории республиканского заказника Клязьминский и в его окрестностях, где в середине 90-х отмечалась плотность населения 1—2 пары/100 км². К началу 2000-х формируется два колониальных поселения по 3—4 пары [27], что соответствует плотности 7—10 пар/100 км². К 2010-м гг. численность вновь снижается до 1—2 пар/100 км² [7, 38]. Сходная, но менее выраженная динамика наблюдается и в северной части Балахнинской низины: 2—4 пары/100 км² в 2000-х гг., 1—1,5 пары/100 км² в 2010-х гг. [44]. В центральной аграрной части Ивановской области численность остается стабильной, плотность населения варьирует в пределах 3—6 пар/100 км². Численность лугового луня в Ивановской области в настоящее время достигает 400—500 пар.

Болотный лунь (*Circus aeruginosus*). Немногочисленный гнездящийся перелетный вид. Остается достаточно обычным, немногочисленным и крайне неравномерно распределенным в пространстве видом региона. Такой характер распространения определяется стенотопностью вида — использованием для гнездования достаточно больших тростниковых выделов, заболоченных выделов кустарника. Такие места характерны для пойм рек и искусственных водоемов: водохранилищ, поливных и пожарных прудов, зарастающих торфоразработок, охлаждающих водоемов ТЭЦ и т. п. Показатели плотности населения на разных обследованных участках очень различны — от 0,5 до 10 пар/100 км² и более [15]. Максимальная плотность населения отмечена в пойме среднего течения р. Лух — до 18 пар/100 км². Локальная динамика численности на участках мониторинга определяется, в первую очередь, состоянием подходящих для гнездования местообитаний и не отражает ситуации с видом в целом вследствие нестабильности территориальных связей. Общая численность вида на территории Ивановской области составляет 300—400 гнездящихся пар.

Тетеревятник (*Accipiter gentilis*). Немногочисленный гнездящийся вид. По территории региона распространен достаточно равномерно (как правило, в пределах 2—4 пар/100 км²), несколько выше плотность населения вблизи городов и в лесных массивах с минимальной антропогенной нагрузкой [22]. Численность ястреба-тетеревятника, по крайней мере на некоторых территориях, сокращается, что связано с обширными рубками участков высокоствольного леса в центральной аграрной части Ивановской области [42] или с крупными пожарами 2010 г. [7, 44]. На участках, где такие рубки не проводились, численность тетеревятника остается стабильной, как, например, в южной части зеленого пояса г. Иваново. На негативное влияние активизации лесоразработок мы указывали и ранее: временное снижение численности

тетеревятника выявлено на Красногорском стационаре после его аренды и интенсификации деятельности [22]. Современную численность вида на территории Ивановской области, учитывая выявленное снижение, можно оценить в 400—500 гнездящихся пар.

Перепелятник (*Accipiter nisus*). Немногочисленный гнездящийся перелетный вид. Распространен достаточно равномерно, плотность населения на локальных участках, как правило, в пределах 3—5 пар/100 км². Численность ястреба-перепелятника на многих участках имеет положительный тренд [42, 43]. Подъем численности связан с увеличением количества участков, зарастающих молодым лесом: это и выведенные из использования сельхозугодья, и зарастающие молодняком вырубки. Подобная динамика отмечена и во Владимирской области [35]. На современном этапе общую численность вида в регионе можно оценить в 600—800 гнездящихся пар.

Обыкновенный канюк (*Buteo buteo*). Обычный гнездящийся перелетный вид. Численность обыкновенного канюка связана с динамикой сельского хозяйства: на территории, где сельскохозяйственное производство хотя бы частично сохраняется, численность канюка остается относительно стабильной и даже имеет положительный тренд. В районах, где заброшена и зарастает большая часть полей, численность канюка снижается. В центральной аграрной части Ивановской области численность канюка в течение первого десятилетия XXI в. возрастала, потом наблюдалась стабилизация и — в последние годы — некоторое снижение [42]. В северной части Балахнинской низины численность канюка связана с пирогенным воздействием: подъем численности наблюдается на 3—6 год после крупных пожаров и также имеет общий положительный тренд [7]. Плотность населения вида на большинстве обследованных участков варьирует в пределах 10—20 пар/100 км², изредка выходя за пределы этих показателей в годы пиков и депрессий. Во Владимирской области отмечается некоторое снижение численности канюка, причинами которого называют активное зарастание полей древесной растительностью и бесконтрольную рубку спелых лесов. В частности, известны факты гибели гнезд во время рубок [36]. Естественно, что на тренды численности этого миофага накладываются колебания, связанные с динамикой численности мышевидных грызунов. Общая численность обыкновенного канюка на территории Ивановской области составляет порядка 2—2,5 тыс. гнездящихся пар.

Зимняк (*Buteo lagopus*). Обычный пролетный, редкий зимующий вид.

Змееяд (*Circaetus gallicus*). Очень редкий гнездящийся перелетный вид. Занесен в Красную книгу РФ [9] и Красную книгу Ивановской области [8]. В пределах Нечерноземного центра РФ небольшие гнездовые группировки сохранились по зандровым долинам в Неруссо-Деснянском полесье, Балахнинской низине, Ветлужско-Унженском полесье [25]. Проводится мониторинг гнездовой группировки змееяда в Балахнинской низине, где численность вида составляет около 10 пар [30]. Интересно, что после пожаров 2010 г., когда огнем была пройдена значительная часть лесов, болот и карьеров в северной части Балахнинской низины, численность змееяда в этой группировке осталась стабильной. Произошло некоторое смещение гнездовых участков, а гари использовались птицами для охоты [46]. Вне этих группировок известны единичные места обитания вида, в том числе участки многолетних регистраций, в частности на Красногорском стационаре и в окрестностях оз. Рубское [43, 47].

Орел-карлик (*Hieraaetus pennatus*). Очень редкий, возможно гнездящийся вид. Занесен в Красную книгу Ивановской области [8]. Находится на границе ареала, постепенно распространяется на север. На территории Ивановской области изредка отмечаются одиночные птицы без признаков гнездования. На побережье Горьковского водохранилища на одном и том же участке птицы регистрировались в течение ряда лет [8]. Во Владимирской области также известны единичные встречи [35].

Большой подорлик (*Clanga (Aquila) clanga*). Очень редкий гнездящийся перелетный вид. Занесен в Красную книгу Ивановской области [8], Красную книгу РФ [9] и RedList IUCN с категорией VU — Vulnerable (уязвимый вид) [51]. Надо отметить, что большой подорлик — единственный вид птиц, обитающих на территории Ивановской области, имеющий охранный статус в Международной Красной книге [51].

В первую половину XX в. был достаточно обычным видом, значительное снижение численности произошло вследствие преобразования потенциальных мест обитания в ходе мелиорации, а также по причине отравления ядохимикатами, распылявшимися с самолетов на увлажненных территориях для уничтожения водяной полевки — основного носителя туляремии. На территории Нечерноземного центра выделяются несколько гнездовых группировок — Дубненская, Завидовская, Мещерская, Клязьминско-Лухская, Днепровско-Деснянская, вне этих группировок вид очень редок [25]. Клязьминско-Лухская гнездовая группировка большого подорлика большей частью находится на территории Ивановской области. Таким образом, наш регион является особо значимым для сохранения этого глобально редкого пернатого хищника и большой подорлик должен рассматриваться для Ивановской области как флаговый вид.

На территории Ивановской области, кроме вышеназванного ядра, гнездовые участки большого подорлика отмечены в массивах водораздельных низинных болот: на границе Гаврилово-Посадского р-на и Юрьев-Польского р-на Владимирской области, в Комсомольском р-не в окрестностях Маркушского водохранилища [8], в Приволжском р-не [6], на побережье Горьковского водохранилища, в Андрониховской пойме [34]. Некоторое увеличение численности большого подорлика в Клязьминско-Лухской группировке происходило в 1990-х — начале 2000-х гг. [48]. В последние годы в Клязьминском заказнике и среднем течении р. Лух численность несколько снизилась. Численность большого подорлика в пределах Ивановской области можно оценить в 15—20 гнездящихся пар.

Малый подорлик (*Clanga (Aquila) pomarina*). Очень редкий гнездящийся перелетный вид, занесен в Красную книгу Ивановской области [8], Красную книгу РФ [9]. Граница ареала распространяется на восток, на территории Ивановской области обнаружены самые восточные из известных в мире гнезд этого вида [50]. Более обычен на северо-западе Европейской России, где в пределах Калининградской, Псковской, Брянской, Новгородской областей гнездится порядка 550 пар. В Нечерноземном центре малый подорлик распространился в конце XX в., на территории Ивановской области известно гнездование 5 пар [49]. В 2015 г. обнаружена новая гнездовая группировка из нескольких пар на севере Владимирского ополя [36]. Между малым и большим подорликом в зоне симпатрии известны случаи гибридизации, в том числе и с территории Ивановской области [24].

Беркут (*Aquila chrysaetos*). Очень редкий, вероятно гнездящийся вид, занесен в Красную книгу Ивановской области [8] и Красную книгу РФ [9]. Исчез на гнездовании в большинстве областей Нечерноземного центра. В Ивановской области предполагается гнездование отдельных пар [25]. В частности, на Горьковском водохранилище в 2003 г. встречена пара со слетком [8], территориальная пара известна с территории Балахнинской низины [34], отмечалась молодая птица в Приволжском р-не [6]. Исходя из приведенных данных, на территории Ивановской области можно предполагать гнездование единичных пар.

Могильник (*Aquila heliaca*). Залетный вид, занесен в Красную книгу РФ [9]. Молодую особь наблюдали 21 июля 2002 г. в пойме р. Лух у пос. Мугреево-Никольское [13].

Степной орел (*Aquila nipalensis*). Залетный вид, занесен в Красную книгу РФ [9]. Степной орел был пойман 3 июня 1986 г. в Пучежском р-не. После передержки в вольере птицу выпустили в Клязьминском заказнике, где она пробыла около месяца, затем исчезла [4].

Орлан-белохвост (*Haliaeetus albicilla*). Очень редкий гнездящийся вид, занесен в Красную книгу Ивановской области [8] и Красную книгу РФ [9].

Наблюдается рост численности орлана-белохвоста на побережье Горьковского водохранилища (на всех участках — Костромском разливе, русловой части, Юрьевецком разливе) и в приустьевых расширениях впадающих в него рек, в среднем и нижнем течении р. Клязьма, в Балахнинской низине [30]. На побережье Горьковского водохранилища и его отрогах в пределах Ивановской области известно не менее десятка индивидуальных участков орлана: граница Костромской и Ивановской областей (по правому берегу), низовья р. Нодога, р. Желвата, 2 пары в низовьях р. Немда, 3—5 пар в низовьях р. Унжа, Андрониховская пойма, устье р. Мича [1, 8, 34, 47]. В последние годы подтверждено гнездование орлана-белохвоста в среднем течении р. Клязьма. С 2010 г. ежегодно наблюдается гнездование орлана на правом берегу р. Клязьма ниже пристани «8 февраля»; с 2012 г. — в Клязьминском республиканском заказнике у оз. Караш. По всей видимости, птиц этой пары наблюдали на Клязьме и ранее [20, 35]. В гнездовой период орлан также отмечался на Моркушском и Уводьском водохранилищах, в среднем течении р. Лух, в Балахнинской низине [8]. Современную численность белохвоста на территории Ивановской области можно оценить в 10—15 гнездящихся пар.

Кречет (*Falco rusticolus*). Очень редкий залетный вид, занесен в Красную книгу РФ [9]. Известны только две достоверные встречи кречета в регионе: 10 апреля 2004 г. при наблюдении пролета гусей в зрительную трубу в пойме р. Клязьма у г. Ковров Владимирской области [14], кроме того, останки кречета (крылья и часть скелета) найдены на кормовом столике филина в северной части Балахнинской низины в мае 2016 г.

Сапсан (*Falco peregrinus*). Очень редкий, возможно гнездящийся вид. Занесен в Красную книгу Ивановской области [8] и Красную книгу РФ [9].

В начале XX в. сапсан гнезвился в центре г. Иваново, на старой колокольне, пока птиц не отстреляли по многочисленным просьбам голубеводов [4]. До середины 50-х гг. сапсаны гнездились на колокольне в г. Гаврилов Посад [4]. После этого сапсана в регионе не отмечали до середины 90-х. Встречи в этот период редки и нерегулярны: в марте 1993 г. пролетный сапсан охотился на галок в центре г. Шуя [12]; в октябре 1995 г. сапсана с перебитым крылом доставили в Ивановский зоопарк из Тейковского р-на; в марте

2001 г. сапсан встречен в г. Иваново в районе площади им. 40-летия Победы [14]. С конца 90-х гг. сапсана начали отмечать в гнездовой период. На территории Клязьминского заказника сапсан встречен 14 июля 1998 г. Он активно окрикивал наблюдателя, после — ворона. На том же месте сапсан встречен 9 июля 1999 г. [21]. В начале XXI в. сапсана отмечали в долине р. Лух, на Горьковском водохранилище, на торфяных карьерах в районе оз. Рубское и торфоразработках «Дубовичье» у оз. Святое [14]. В 2015 г. взрослая самка сапсана, а позже пара птиц встречены в гнездовой период в окрестностях с. Острецово Родниковского р-на. В последние годы сапсан регулярно отмечается на торфоразработках «Большое болото» в Южском р-не. Мы предполагаем гнездование отдельных пар сапсана на территории Ивановской области.

Чеглок (*Falco subbuteo*). Немногочисленный гнездящийся перелетный вид. Гнездится по всей территории региона, численность относительно стабильна, плотность населения на локальных участках оценивается в пределах 1—3 пар/100 км² [7, 11, 12, 14, 44]. В последние годы чеглок начал регулярно поселяться в старых гнездах воронов на опорах ЛЭП, что привело к росту численности вида на локальных участках [42]. На территории области гнездится порядка 250 пар [12, 14].

Дербник (*Falco columbarius*). Редкий гнездящийся вид, занесен в Красную книгу Ивановской области [8].

М. А. Бубнов добыл молодого сокола этого вида 3 августа 1928 г., на основании чего Г. П. Дементьевым было сделано предположение о гнездовании дербника на территории региона*. По данным конца XX в., дербник считался малочисленным пролетным видом [4], была известна лишь одна встреча дербника в гнездовой период — 1 июля 1992 г. в низовьях р. Желвата (Красногорский стационар) [21].

Впервые гнездование дербника было доказано в 2003 г. на территории Балахнинской низины (Южский р-н). В мае у старого гнезда ворона встречены беспокоящиеся птицы, позже здесь же были отмечены летные птенцы. В последующие годы гнездование дербника в Балахнинской низине отмечалось неоднократно — и в лесоозерном комплексе, и на торфоразработках «Большое болото» [14, 45]. Гнездование дербника также отмечалось на территории комплекса торфяных карьеров «Октябрьский» в Комсомольском р-не [45], на торфоразработках «Сахтыш — Рубское» и побережье оз. Рубское в Тейковском р-не [43], в парках г. Иваново [45].

Учитывая вышеприведенные данные и информацию о летних встречах дербника в других точках региона, можно предположить, что его численность в Ивановской области возрастает и что в настоящее время на ее территории гнездится порядка 50—100 пар. В последние годы отмечается гнездование вида и во Владимирской области [36].

Кобчик (*Falco vespertinus*). Очень редкий гнездящийся вид, занесен в Красную книгу Ивановской области [8], предложен к внесению в новое издание Красной книги РФ.

В 1981—1982 гг. кобчик изредка встречался в большинстве районов Ивановской области [40]. В настоящее время кобчик является крайне редким гнездящимся видом региона, известны встречи в пойме р. Нерль, на побережье Горьковского водохранилища (Андрониховская пойма), в Клязьминском

* См. рукопись М. А. Бубнова «К познанию птиц Ивановской области» (1958 г.). Хранится в личном архиве В. Н. Мельникова.

заказнике, на комплексе торфоразработок «Сахтыш — Рубское», у пос. Дегтярево Ивановского р-на [14]. Гнездование кобчика наблюдалось в Шуйском р-не около д. Колобово и Павлюково в 2000—2005 гг. [37] и у с. Васильевское [18]; в частности, отмечена гибель на опорах ЛЭП взрослой самки и двух слетков из выводка. В последние годы широко по региону регистрируются регулярные встречи мигрирующих групп, а также взрослых птиц в гнездовой период и выводков в конце лета — начале осени. На территории Ивановской области численность кобчика возрастает и превышает предыдущие оценки в 5—10 гнездящихся пар [14].

Обыкновенная пустельга (*Falco tinnunculus*). Немногочисленный гнездящийся перелетный вид, занесен в Красную книгу Ивановской области [8]. В конце 80-х — середине 90-х гг. мы оценивали численность пустельги в 850—700 пар (в среднем 3,2 пары/100 км²), с варьированием в зависимости от численности мышевидных грызунов [12]. Затем численность значительно снизилась, и в конце 90-х пустельга стала в нашем крае довольно редкой. Причиной этого снижения численности стало перераспределение основных поставщиков гнезд для пустельги — серых ворон. Большинство ворон в настоящее время гнездится в населенных пунктах, в основном — в городах, а в естественных условиях серая ворона стала крайне редкой [31]. В последние годы наметилась некоторая тенденция к росту, но численность остается низкой и в настоящее время [7, 42]. Большинство гнезд сейчас располагаются на строениях человека — на колокольнях и в нишах полуразрушенных церквей, на заброшенных сооружениях сельхозпредприятий и домах. В Приволжском р-не выявлена группировка пустельги, гнездящаяся на опорах высоковольтной ЛЭП. На 160 обследованных анкерах выявлено 50 гнезд, 15 из которых занято вороном, а 35 — пустельгой [5]. Бетонные столбы имеют квадратное сечение, в верхней части — металлическая конструкция, начинающаяся «стаканом», полунадетым на бетонную опору. В верхней части этого стакана, на 15—20 см поднимающейся над бетоном, и устраиваются гнезда. Численность этой группировки растет и, возможно, достигает 50 пар [6].

Обыкновенная пустельга проникает в урбанизированную среду и начинает гнездиться в городах [10], в частности, в г. Иваново отмечено гнездование пустельги в нишах жилых домов. Современную численность вида в пределах Ивановской области можно оценить в 300—350 пар [14].

Мониторинг такой значимой показательной группы, как дневные хищные птицы, требует большего внимания в регионе, должен вестись на большем количестве постоянных площадок, по единой методике и — в идеале — с централизованной координацией. В ближайшие годы можно ожидать изменений, связанных, с одной стороны, с частичным возобновлением сельскохозяйственного производства на заброшенных ранее территориях, причем в иных, не традиционных формах. Это определяется развитием стойлового животноводства и необходимостью его обеспечения кормами. Также вероятно масштабное выращивание культур для получения энергоносителей, например биогаза. С другой стороны — будет продолжаться дальнейшее зарастание на не включенных в севооборот территориях и на вырубках. В современных условиях процессы таких посттехногенных сукцессий могут испытывать заметные влияния антропогенного генезиса на разных этапах, т. е. иметь антроподинамический характер.

Библиографический список

1. Бака С. В., Киселёва Н. Ю., Новикова Л. М. Ключевые орнитологические территории Нижегородской области. Нижний Новгород, 2004. 95 с.
2. Богомолов Д. В. Популяционные тренды представителей рода *Circus* в Европейской России // Материалы IV конференции по хищным птицам Северной Евразии, Пенза, 1—3 февраля 2003 г. Пенза, 2003. С. 55—56.
3. Буслаев С. В., Мельников В. Н., Хелевина С. А. Хищные птицы в условиях юга европейской тайги // Экологические чтения : тезисы докладов. Иваново, 1991. С. 35—37.
4. Герасимов Ю. Н., Сальников Г. М., Буслаев С. В. Птицы Ивановской области. М., 2000. 125 с.
5. Калинин А. А. Соколообразные Приволжского района Ивановской области и его окрестностей // Изучение и охрана хищных птиц Северной Евразии : материалы V Международной конференции по хищным птицам Северной Евразии, Иваново, 4—7 февраля 2008 г. Иваново, 2008. С. 241—243.
6. Калинин А. А. Некоторые сведения о редких видах птиц Приволжского района Ивановской области и сопредельных территорий // Особо охраняемые природные территории и объекты Владимирской области и сопредельных регионов : материалы II Межрегиональной научно-практической конференции «Мониторинг и сохранение особо ценных природных территорий и объектов Владимирской области и сопредельных регионов», Владимир, 14—15 декабря 2012 г. Владимир, 2013. Вып. 2. С. 106—111.
7. Кашианов А. Л., Слащинуна Я. А. Динамика численности хищных птиц в Клязьминском заказнике и Балахнинской низине // Материалы XIV Международной орнитологической конференции по хищным птицам Северной Евразии (Алматы, 18—24 августа 2015 г.). Алматы, 2015. С. 234—235.
8. Красная книга Ивановской области / под ред. В. А. Исаева. Иваново : ПресСто, 2007. Т. 1 : Животные. 236 с.
9. Красная книга Российской Федерации : животные. М. : АСТ-Астрель, 2001. 862 с.
10. Лыков Е. Л. Гнездование обыкновенной пустельги в городах Палеарктики : краткий обзор // Хищные птицы Северной Евразии. Проблемы адаптации в современных условиях : материалы VII Международной конференции РГСС, Сочи, 19—24 сентября 2016 г. Ростов н/Д : Изд-во Юж. федер. ун-та, 2016. С. 333—337.
11. Мельников В. Н. Динамика численности соколообразных на севере Ивановской области // Редкие виды птиц Нечерноземного центра России : материалы конференции «Редкие виды птиц Европейского центра России». М., 1998. С. 232—234.
12. Мельников В. Н. Состояние численности дневных хищных птиц Ивановской области // Материалы III конференции по хищным птицам Восточной Европы и Северной Азии. Ставрополь, 1999. Ч. 2. С. 98—100.
13. Мельников В. Н. Динамика численности дневных хищных птиц Ивановской области // Изучение и охрана хищных птиц Северной Евразии : материалы V Международной конференции по хищным птицам Северной Евразии, Иваново, 4—7 февраля 2008 г. Иваново, 2008. С. 269—273.
14. Мельников В. Н. Сокола (*Falco*) в Восточном Верхневолжье // Новітні дослідження соколоподібних та сов : матеріали III Міжнародної конференції «Хижі птахи України», Кривий Ріг, 24—25 жовтня 2008 р. Кривий Ріг, 2008. С. 249—254.
15. Мельников В. Н. Сравнительный анализ населения соколообразных разных природно-ландшафтных комплексов Ивановской области // Хищные птицы в динамической среде третьего тысячелетия: состояние и перспективы : труды VI Международной конференции по соколообразным и совам Северной Евразии, Кривой Рог, 27—30 сентября 2012 г. Кривой Рог, 2012. С. 191—196.
16. Мельников В. Н. Скопа в Ивановской области — современное распространение и численность // Особо охраняемые природные территории и объекты Владимирской области и сопредельных регионов : материалы II Межрегиональной

- научно-практической конференции «Мониторинг и сохранение особо ценных природных территорий и объектов Владимирской области и сопредельных регионов», Владимир, 14—15 декабря 2012 г. Владимир, 2013. Вып. 2. С. 114—115.
17. Мельников В. Н. Крупные пернатые хищники Ивановской области // Пернатые хищники и их охрана. 2013. № 27. С. 208—214.
 18. Мельников В. Н. Результаты работ по изучению редких видов птиц и ведению Красной книги Ивановской области // Редкие виды птиц Нечерноземного центра России : материалы V совещания «Распространение и экология редких видов птиц Нечерноземного центра России» (Москва, 6—7 декабря 2014 г.). М., 2014. С. 29—32.
 19. Мельников В. Н., Баринов С. Н. Экология питания черного коршуна в Клязьминском заказнике // Материалы III конференции по хищным птицам Восточной Европы и Северной Азии. Ставрополь, 1999. Ч. 2. С. 100—102.
 20. Мельников В. Н., Баринов С. Н., Киселёв Р. Ю., Романова С. В. Орнитофауна Клязьминского заказника // Инвентаризация, мониторинг и охрана ключевых орнитологических территорий России. М., 2001. Вып. 3. С. 60—67.
 21. Мельников В. Н., Баринов С. Н., Романова С. В. Редкие виды хищных птиц Ивановской области // Материалы рабочего совещания «Редкие виды хищных птиц севера лесной зоны Европейской части России: перспективы изучения и пути охраны», Череповец, 11—14 сентября 2000 г. Череповец, 2000. С. 17—19.
 22. Мельников В. Н., Буслаев С. В. Ястреб-тетеревятник в Ивановской области // Ястреб-тетеревятник. Место в экосистемах России : материалы IV конференции по хищным птицам Северной Евразии, Пенза, 1—3 февраля 2003 г. Пенза, 2003. С. 84—90.
 23. Мельников В. Н., Буслаев С. В. Обыкновенный канюк в Восточном Верхневолжье // Канюки Северной Евразии: распространение, состояние популяций, биология : труды VI Международной конференции по соколообразным и совам Северной Евразии, Кривой Рог, 27—30 сентября 2012 г. Кривой Рог, 2012. С. 108—121.
 24. Мельников В. Н., Дмитренко М. А., Иванов М. Н., Киселёв Р. Ю., Киселёва С. В., Домбровский В. Ч. Результаты экспедиции 2005 г. по изучению подорликов Европейского центра России // Изучение и охрана большого и малого подорлика в Северной Евразии : материалы V Международной конференции по хищным птицам Северной Евразии, Иваново, 4—7 февраля 2008 г. Иваново, 2008. С. 191—194.
 25. Мельников В. Н., Костин А. Б., Мищенко А. Л., Пчелинцев В. Г. Современное состояние редких видов хищных птиц в Нечерноземном центре // Редкие виды птиц Нечерноземного центра России : материалы IV совещания «Распространение и экология редких видов птиц Нечерноземного центра России» (Москва, 12—13 декабря 2009 г.). М., 2009. С. 56—76.
 26. Мельников В. Н., Романова С. В., Баринов С. Н., Сальникова Ю. Г. Динамика численности соколообразных Клязьминского заказника и прилегающих неохраемых территорий // Материалы III конференции по хищным птицам Восточной Европы и Северной Азии. Ставрополь, 1999. Ч. 2. С. 103—105.
 27. Мельников В. Н., Романова С. В., Баринов С. Н. Мониторинг соколообразных на постоянных площадях в Восточном Верхневолжье // Площадочный метод оценки обилия птиц в современной России. Тамбов, 2001. С. 129—140.
 28. Мельников В. Н., Романова С. В., Чудненко Д. Е. Хищные птицы долины реки Теза // История и развитие идей П. П. Семёнова-Тян-Шанского в современной науке и практике школьного образования : материалы Всероссийской научно-практической конференции, посвященной 175-летию со дня рождения П. П. Семёнова-Тян-Шанского, 16—18 мая 2002 г. Липецк, 2002. Т. 2 : Зоология. Ботаника. Экология. С. 65—67.
 29. Мельников В. Н., Сальников Г. М. Соколообразные Ивановской области: распределение, численность и тенденции ее динамики // Орнитология. М. : Изд-во МГУ, 1998. Вып. 28. С. 100—103.
 30. Мельников В. Н., Сергеев М. А. Орлан-белохвост *Haliaeetus albicilla* и змеяд *Circaetus gallicus* в бассейне реки Клязьмы // Русский орнитологический журнал. 2015. Т. 24, № 1186. С. 3226—3231.

31. Пономарев В. А., Константинов В. М., Сальников Г. М. Экология некоторых синантропных врановых птиц Восточного Верхневолжья. Иваново, 2004. 144 с.
32. Редкие животные : материалы по ведению Красной книги Ивановской области, 2013 / под ред. В. А. Исаева. Иваново : ПресСто, 2013. 147 с.
33. Редкие животные: материалы по ведению Красной книги Ивановской области в 2013—2014 гг. / под ред. В. Н. Мельникова. Иваново : ПресСто, 2015. 190 с.
34. Редкие животные и грибы : материалы по ведению Красной книги Ивановской области, 2012 / под ред. В. А. Исаева. Иваново : ПресСто, 2012. 132 с.
35. Романов В. В., Быков Ю. А., Сергеев М. А. Авифауна соколообразных птиц Владимирской области в конце XX — начале XXI века // Хищные птицы в динамической среде третьего тысячелетия: состояние и перспективы : труды VI Международной конференции по соколообразным и совам Северной Евразии, Кривой Рог, 27—30 сентября 2012 г. Кривой Рог, 2012. С. 220—227.
36. Романов В. В., Быков Ю. А., Сергеев М. А. Новые сведения о соколообразных птицах Владимирской области // Хищные птицы Северной Евразии. Проблемы адаптации в современных условиях : материалы VII Международной конференции РГСС, Сочи, 19—24 сентября 2016 г. Ростов н/Д : Изд-во Юж. федер. ун-та, 2016. С. 184—188.
37. Рябов А. В. Гнездование кобчика в Ивановской области // Изучение и охрана хищных птиц Северной Евразии : материалы V Международной конференции по хищным птицам Северной Евразии, Иваново, 4—7 февраля 2008 г. Иваново, 2008. С. 293—294.
38. Слащанина Я. А. Мониторинг соколообразных на территории Клязьминского республиканского заказника : (Ивановская область) // Хищные птицы в динамической среде третьего тысячелетия: состояние и перспективы : труды VI Международной конференции по соколообразным и совам Северной Евразии, Кривой Рог, 27—30 сентября 2012 г. Кривой Рог, 2012. С. 234—237.
39. Хелевина С. А., Буслаев С. В. О трофических связях обыкновенного канюка в условиях лесной зоны // Изучение птиц в СССР, их охрана и рациональное использование. Л., 1986. Ч. 2. С. 305.
40. Хелевина С. А., Буслаев С. В., Кудашева Е. М. Некоторые данные о видовом составе и численности дневных хищных птиц Ивановской области // Экология хищных птиц. М. : Наука, 1983. С. 148—150.
41. Хелевина С. А., Шатило Г. Г., Буслаев С. В. Хищные птицы вторичных смешанных лесов таежной зоны // Вопросы инвентаризации фауны. Иваново : Иван. гос. ун-т, 1992. С. 127—130.
42. Чудненко Д. Е. Мониторинг населения соколообразных центрального аграрного района Ивановской области // Хищные птицы Северной Евразии. Проблемы адаптации в современных условиях : материалы VII Международной конференции РГСС, Сочи, 19—24 сентября 2016 г. Ростов н/Д : Изд-во Юж. федер. ун-та, 2016. С. 205—209.
43. Чудненко Д. Е., Мельников В. Н. Население соколообразных и сов в окрестностях Рубского озера : (Тейковский район Ивановской области) // Актуальные проблемы изучения и сохранения биоразнообразия Верхневолжья : материалы Межрегиональной научно-практической конференции, посвященной 35-летию кафедры общей биологии и ботаники и ботанического сада ИвГУ. Иваново, 2012. С. 85—90.
44. Чудненко Д. Е., Мельников В. Н., Каиштанов А. Л. Соколообразные северной части Балахнинской низины // Хищные птицы в динамической среде третьего тысячелетия: состояние и перспективы : труды VI Международной конференции по соколообразным и совам Северной Евразии, Кривой Рог, 27—30 сентября 2012 г. Кривой Рог, 2012. С. 286—291.
45. Чудненко Д. Е., Трофимов А. П., Киселёв Р. Ю. Гнездование дербника в г. Иванове и Ивановской области // Орнитологические исследования в Северной Евразии : тезисы XII Международной орнитологической конференции Северной Евразии (Ставрополь, 31 января — 5 февраля 2006 г.). Ставрополь, 2006. С. 570.
46. Шмелёва Г. П. Редкие виды птиц Балахнинской низины после катастрофических пожаров 2010 г. // Редкие виды птиц Нечерноземного центра России : материалы

- V совещания «Распространение и экология редких видов птиц Нечерноземного центра России» (Москва, 6—7 декабря 2014 г.). М., 2014. С. 142—150.
47. *Melnikov V. N.* Raptors in the Gorkovsky reservoir area // Status of Raptor Populations in Eastern Fennoscandia : Proceedings of the Workshop, Kostomuksha, Karelia, Russia, November 8—10, 2005. Petrozavodsk : KarRC RAS, 2006. P. 101—104.
48. *Melnikov V. N.* Wistepowanie orlika grubodziobego *Aquila clanga* i orlika krzykliwego *Aquila pomarina* w obwodzie Iwanowskim, centralna Rosja // Badania a problemy ochorony orlika grubodziobego *Aquila clanga* i orlika krzykliwego *Aquila pomarina*. Osowiec : Twierdza, 2005. P. 63—65.
49. *Melnikov V., Mishchenko A.* The lesser spotted eagle in Russia // Slovak Raptors Jurnal. 2015. Vol. 9. P. 76—77.
50. *Melnikov V. N., Solovkov D. A., Kostin A. B., Egorova N. A., Bogomolov D. V.* Nesting of lasser spotted eagle (*Aquila pomarina*) in Ivanovo region (Russia) // Acta Ornithocologica. 2001. Bd. 4, Heft 2—4. S. 287—289.
51. URL: <http://www.iucnredlist.org/> (дата обращения: 10.03.2017).

УДК 581. 2

Л. Ю. Минеева, Н. Г. Тихомирова

ГРИБНЫЕ БОЛЕЗНИ ДРЕВЕСНЫХ РАСТЕНИЙ ОКРЕСТНОСТЕЙ ОСОБО ОХРАНЯЕМОЙ ПРИРОДНОЙ ТЕРРИТОРИИ «РУБСКОЕ ОЗЕРО»

Приводятся основные результаты комплексного исследования грибных болезней древесных растений на особо охраняемой природной территории и прилегающих территориях за вегетационные сезоны с 2013 по 2016 г.

Ключевые слова: болезнь, грибы-паразиты, растение-хозяин, фитопатоген, грибные болезни, ржавчинные грибы, мучнисторосяные грибы.

The article presents the main results of a comprehensive study of fungal diseases of woody plants in a protected area and adjacent areas during the growing seasons from 2013 to 2016.

Key words: disease, fungi-parasites, the host-plant, phytopathogen, fungal diseases, rust fungi, powdery mildew fungi.

Большое растение — своеобразная биологическая система, в рамках которой происходят рост и развитие двух организмов — растения и патогена. Их сосуществование основано на особых взаимоотношениях, в которых ведущая роль принадлежит патогену — возбудителю болезни. Пребывание возбудителя в растении нарушает нормальный процесс жизнедеятельности последнего [11]. Фитопатогенные виды грибов — возбудители различных заболеваний — часто являются причиной ослабления и гибели древесных растений на разных фазах их роста и развития.

Исследование патогенной микобиоты древесных растений представляется одной из наиболее важных и актуальных проблем ботанико-экологических исследований, так как грибные болезни значительно распространены и недостаточно изучены. Большое значение в решении этого вопроса имеет изучение видового состава возбудителей болезней, их биологических и экологических особенностей, распространения, специализации, степени

© Минеева Л. Ю., Тихомирова Н. Г., 2017

• Серия «Естественные, общественные науки»

вредоносности, симптомов проявления заболевания для предотвращения усыхания и гибели лесов, улучшения лесопатологической диагностики и проведения лесозащитных мероприятий. Территория Рубского озера и его окрестностей входит в состав особо охраняемой природной территории (ООПТ) регионального значения, поэтому является крайне важной в изучении биологического разнообразия.

Первым комплексным исследованием микофлоры Ивановской области были работы К. П. Алявдиной, проведенные в период с 1923 по 1949 г. В них приведены выявленные виды грибов различных систематических групп [1]. Также исследования патогенных грибов Ивановской области, включая окрестности Рубского озера, уже продолжительное время проводятся Л. Ю. Минеевой, при этом основное внимание уделяется мучнисторосяным и ржавчинным паразитам [4, 5, 6, 7, 8].

В настоящее время исследование грибов-паразитов — возбудителей болезней растений продолжается [9, 10, 12, 13, 14]. В данной работе представлены основные результаты изучения грибных болезней древесных растений, биологии и экологии их возбудителей, полученные в период с июня по сентябрь 2013—2016 гг. в окрестностях ООПТ «Рубское озеро».

Озеро Рубское расположено в Тейковском районе Ивановской области в 40 км юго-западнее г. Иванова, в 15 км от г. Тейково, в окрестностях с. Золотниковская пустынь и д. Синяя осока, имеет координаты: 56° 43'33" с. ш. и 40°36'51" в. д. [9]. Объект изучения — древесные растения с признаками поражения грибными заболеваниями. Исследованная территория включает лесной массив, расположенный в окрестностях ООПТ «Рубское озеро» (сосновые, еловые, березовые, смешанные, сосново-мелколиственные, сосново-еловые, сосново-елово-березовые, березово-еловые с участием зеленых мхов, елово-мелколиственные леса с участием в подлеске широколиственных пород липы и дуба, елово-березовые леса с участием зеленых и сфагновых мхов), сфагновые болота, расположенные по западному и восточному берегам озера, населенные пункты, территории спортивно-оздоровительных лагерей ИвГУ, ИГЭУ и бывшей ИГТА, примыкающих к Рубскому озеру [10]. При сборе пораженного материала и диагностике грибных болезней древесных растений применялся макроскопический метод, т. е. наружный осмотр больных растений невооруженным глазом в полевых условиях в ходе маршрутных исследований. При этом обращали внимание на окраску растения, угнетенность или замедленность его развития, появление на стеблях, хвое, листьях, генеративных органах пятен или налетов, загнивание или разрушение стволов и сучьев, а также на другие деструктивные признаки. Визуальная диагностика позволяла предварительно идентифицировать тип болезни на основании внешних симптомов поражения и определить вид растения-хозяина. Далее применялся микроскопический метод в лабораторных условиях, где проводилось исследование спороношений грибов — возбудителей болезней и определялась их видовая принадлежность с помощью специализированной литературы [15, 16]. Для исследования образцов грибов и получения иллюстративного материала использовали цифровой микроскоп Motic Images Plus Version 2. 0 ML, совмещенный с мультимедийным компьютером.

Болезни растений классифицируются по внешнему виду, месту проявления, продолжительности течения, возрасту древесной породы, а также по видам грибов — возбудителей заболеваний. Оценка распределения видов патогенных грибов по типам болезней древесных растений показала, что наиболее распространены пятнистости (34 % от общего числа заболеваний), на втором месте — ржавчина (18 %), на третьем месте — мучнистая роса

(15 %), гниль составляет 14 %, шютте, экзобазидиоз и монилиоз — по 4 %, засыхание ветвей, парша — по 3 %, сосновый вертун — 1 %. Эти данные отражены в диаграмме (рис. 1).

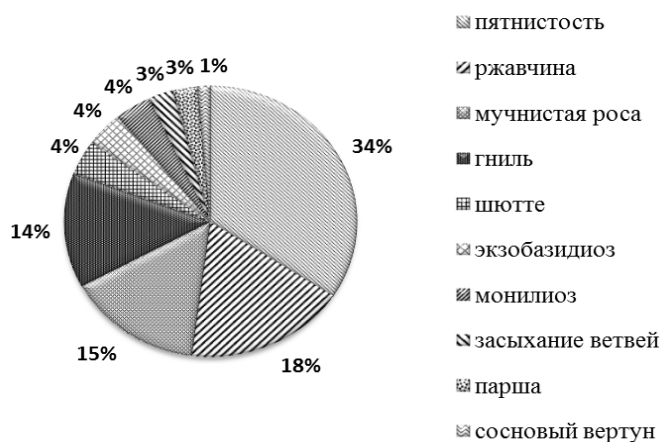


Рис. 1. Соотношение типов грибных болезней древесных растений

Симптомы некоторых грибных болезней можно увидеть на рис. 2, 5. Также здесь представлены споронии грибов-паразитов на различных стадиях жизненного цикла (рис. 3, 4, 6, 7).



Рис. 2. Ржавчина на *Rosa rugosa*.
Возбудитель — *Phragmidium tuberculatum* (Mueler)



Рис. 3. Эциоспоры гриба-паразита
Phragmidium tuberculatum
x1500

Древесные растения имеют свой специфический состав грибов и этим существенно отличаются от травянистых, водных и других групп растений, поэтому можно прогнозировать нахождение тех или иных групп патогенов на данных объектах исследования и определять их количественные параметры. [2]. В результате мониторинга было собрано и определено 73 вида грибов-паразитов из 43 родов, 17 семейств, 10 порядков, 8 классов, 3 отделов царства Грибы. При анализе систематического списка собранных видов мы выявили, что отдел *Ascomycota* (сумчатые грибы) включает 20 видов (27 %), *Basidiomycota* (базидиальные грибы) — 27 видов (37 %), *Deuteromycota* (несовершенные грибы) — 26 видов (36 %). Ведущим по числу видов грибов-паразитов древесных растений является класс *Coelomycetes*, включающий 17 видов (23 % от общего числа видов), порядок *Uredinales* — 14 видов (19 %), семейство *Erysiphaceae* — 11 видов (15 %).



Рис. 4. Телиоспоры гриба-паразита *Phragmidium tuberculatum* x 1500



Рис. 5. Мучнистая роса на *Ribes nigrum*. Возбудитель — *Sphaerotheca mors uvae* (Schw.) Berk.

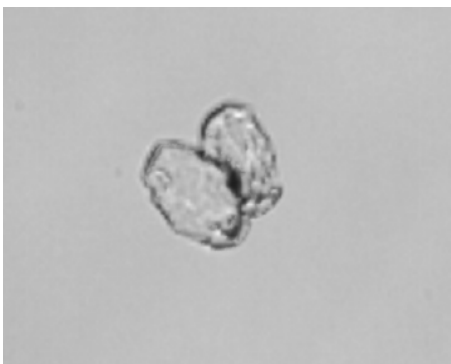


Рис. 6. Конидии гриба-паразита *Sphaerotheca mors uvae* x 400



Рис. 7. Клейстотеций гриба-паразита *Sphaerotheca mors uvae* x 400

Одной из задач нашей работы был анализ грибов-паразитов по характеру питания. Среди выявленных видов патогенов преобладают облигатные паразиты — 62 вида (85 % от общего числа видов), факультативные паразиты — 11 видов (15 %).

Грибы-паразиты обладают филогенетической специализацией, т. е. способностью паразитировать на определенных растениях-хозяевах. Круг растений, пораженных данным патогеном, представляется тем, насколько широк круг питательных веществ, которые он может преобразовать в доступную форму, и его возможностью в нейтрализации имеющихся в тканях

растений токсичных веществ [11]. Выявленные фитопатогены зарегистрированы на 27 видах древесных растений из 14 семейств. Распределение фитопатогенных грибов по семействам питающих растений достаточно неравномерно. Как следует из диаграммы (рис. 8), большая часть грибов паразитирует на представителях следующих семейств высших растений: *Rosaceae* — 22 вида (30 % от общего числа собранных видов), *Betulaceae* — 12 видов (16 %). На видах семейств *Salicaceae* — 8 видов (11 %), *Pinaceae* — 6 видов (8 %), *Rhamnaceae* — 5 видов (7 %). Меньшее количество видов грибов-паразитов отмечено на таких семействах, как *Aceraceae*, *Caprifoliaceae*, *Ericaceae* — по 3 вида (по 4 %), *Adoxaceae*, *Grossulariaceae*, *Cupressaceae*, *Celastraceae*, *Tiliaceae* — по 2 вида (по 3 %), *Fagaceae* — 1 вид (1 %). Среди них поражаются лекарственные, декоративные, пищевые и другие хозяйственно-полезные группы растений.

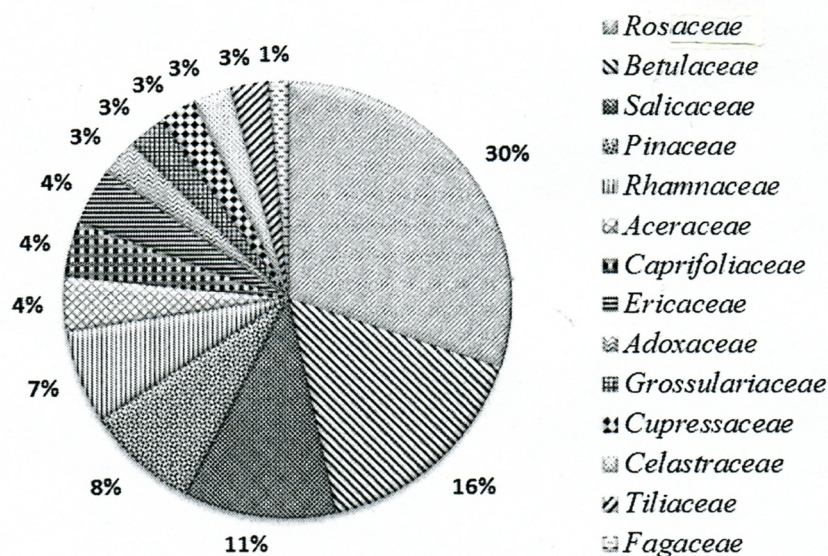


Рис. 8. Распределение видов фитопатогенных грибов по семействам питающих растений

На основании сравнения жизненных форм было выяснено, что симптомы грибных заболеваний почти в равной степени проявляются на деревьях (45 %) и кустарниках (44 %), на кустарничках — меньше (11 %).

В ходе определения патогенных грибов были отмечены случаи совместного паразитирования нескольких грибов-патогенов на одном растении одновременно. Например, на *Frangula alnus* Mill. паразитируют одновременно два патогена: *Puccinia coronata* Corda и *Microsphaera divaricate* или на *Ribes nigrum* L. обнаружены *Puccinia ribesii-caricis* и *Sphaerotheca mors uvae*. Таких примеров много, это можно объяснить, во-первых, тем, что данный вид питающего растения является подходящим субстратом для нескольких патогенов; во-вторых, тем, что между патогенами на одном экземпляре нет жесткой конкуренции.

Растительные ткани и органы различаются по питательному субстрату, поэтому паразиты специализируются на заселении определенных органов или тканей [11]. Оценивая органотропную специализацию патогенных грибов, мы выяснили, что преобладают паразиты листьев (79 %). На стеблях отмечено 15 % патогенов, на плодах — 6 %.

Комплексный мониторинг грибных заболеваний древесных растений необходимо продолжить для получения еще более полной картины видового разнообразия грибов, максимально объективной оценки фитосанитарного состояния экосистем и для разработки методов борьбы против распространения грибов-паразитов на ООПТ «Рубское озеро» и прилегающих территориях, что поможет исключить гибель лесных растительных популяций и способствовать сохранению биоразнообразия.

Библиографический список

1. *Алявдина К. П.* Материалы по грибной флоре леса Ивановской области // Известия Иваново-Вознесенского политехнического института. 1928. Т. 12. С. 147—164.
2. *Жуков А. М., Гниненко Ю. И., Жуков П. Д.* Опасные малоизученные болезни хвойных пород в лесах России. 2-е изд., испр. и доп. Пушкино : ВНИИЛМ, 2013. 128 с.
3. *Исаева Л. Г.* Мониторинг фитопатогенов древесных растений северных лесов // Болезни и вредители в лесах России: век XXI : материалы Всероссийской конференции с международным участием и V ежегодных чтений памяти О. А. Катаева, Екатеринбург, 20—25 сентября 2011 г. Красноярск : ИЛ СО РАН, 2011. С. 79—81.
4. *Минева Л. Ю.* Мучнисторосяные грибы Ивановской области // Вопросы экологии Волжско-Окского междуречья : межвузовский сборник научных трудов. Ковров : КГТА, 1999. С. 63—65.
5. *Минева Л. Ю.* Новые виды ржавчинных грибов Ивановской области // Тезисы докладов юбилейной научной конференции ИвГУ. Иваново, 1994. С. 249—250.
6. *Минева Л. Ю.* Новые сведения о видовом составе мучнисторосяных грибов Тейковского района Ивановской области // Экологические проблемы Ивановской области : сборник материалов межвузовской научно-практической конференции / ИГТА. Иваново, 2005. С. 10—11.
7. *Минева Л. Ю.* Новые сведения о ржавчинных грибах на территории Плесского музея-заповедника // Плесский сборник : материалы XII Плесской научно-практической конференции. Плес, 2010. С. 77—80.
8. *Минева Л. Ю., Скворцова О. Е.* Итоги изучения ржавчинных грибов Савинского района Ивановской области // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2011. Вып. 2. С. 10—13.
9. *Минева Л. Ю., Тихомирова Н. Г.* Мучнисторосяные грибы — паразиты деревьев и кустарников окрестностей Рубского озера // Борисовский сборник. Вып. 7 / отв. ред. В. В. Возилов. Иваново : Референт, 2016. С. 245.
10. *Минева Л. Ю., Тихомирова Н. Г.* Ржавчинные грибы — паразиты деревьев и кустарников окрестностей Рубского озера // Биосистемы: организация, поведение, управление : тезисы докладов 69-й Всероссийской школы-конференции молодых ученых, 27—29 апреля, 2016 г. Н. Новгород : ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2016. С. 91.
11. *Попкова К. В.* Общая фитопатология. М. : Агропромиздат, 1989. 399 с.
12. *Тихомирова Н. Г.* Грибные болезни деревьев и кустарников в окрестностях Рубского озера // Тезисы докладов научной конференции ИвГУ. Иваново : Иван. гос. ун-т, 2014. С. 142.

13. Тихомирова Н. Г. Фитопатогенные грибы деревьев и кустарников окрестностей Рубского озера // Тезисы докладов научной конференции ИвГУ. Иваново : Иван. гос. ун-т, 2015. С. 124—125.
14. Тихомирова Н. Г., Минеева Л. Ю. Трутовые грибы древесных пород окрестностей Рубского озера (Ивановская область) // Перспективы науки — 2016 : сборник докладов 3-го Международного конкурса научно-исследовательских работ. Т. 3 : Естественные и технические науки / науч. ред. д-р экон. наук, проф. А. В. Гумеров. Казань : ООО «Рокета Союз», 2016. С. 68—70.
15. Томошевич М. А. Атлас патогенных микромицетов древесных растений Сибири. Новосибирск : Гео, 2012. 250 с.
16. Черепанова Н. П. Систематика грибов. СПб. : Изд-во СПбГУ, 2005. 344 с.

УДК 544.362.4:544.433.21:547.261:547.262:547.551.1:547.541.513

Е. Н. Крылов, С. С. Кильдюшова

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЕАКЦИОННОЙ СПОСОБНОСТИ НУКЛЕОФИЛОВ В РЕАКЦИЯХ АМИНОЛИЗА, ГИДРОЛИЗА И АЛКОГОЛИЗА АРИЛСУЛЬФОНИЛХЛОРИДОВ

Квантово-химический анализ на основе теории относительной нуклеофильности показал, что относительная активность спиртов в реакции с сульфонилахлоридами меньше, чем воды, при гидролизе этих соединений. Относительная нуклеофильность воды примерно на порядок выше, чем спиртов. Самой большой нуклеофильностью обладают ароматические амины.

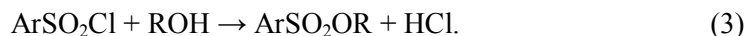
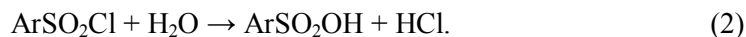
Ключевые слова: относительная нуклеофильность, аминолит, алкохолит, гидролиз, сульфонилахлориды.

Quantum-chemical analysis based on the theory of relative nucleophilicity has shown that relative activity of aliphatic alcohols in alcoholysis reactions with sulphonyl chlorides is lesser than that of water at hydrolysis of these materials. Relative nucleophilicity of water is approximately an order of magnitude greater than that of alcohols. Aromatic amines possess the highest nucleophilicity.

Key words: relative nucleophilicity, aminolysis, alcoholysis, hydrolysis, sulphonyl chlorides.

Введение

Реакция аминирования арилсульфонилхлоридов (1), протекающая в среде водных алифатических спиртов, сопровождается побочной реакцией гидролиза (2), что учитывается при обработке кинетических экспериментов [3]. Реакция алкохолиза (3), которая ожидается естественной вследствие сходства нуклеофилов (вода — спирт) и большей нуклеофильности спиртов из-за наличия алкильных доноров, протекает крайне замедленно даже в метаноле, а в остальных спиртах она практически незаметна, по одним данным [2], и вполне наблюдаема — по другим [8]. Теоретический анализ этого явления до сих пор не проведен.



Реакционная способность органических соединений и механизмы органических реакций могут быть исследованы различными методами, в том числе основанными на приложении теории DFT к количественной теории

© Крылов Е. Н., Кильдюшова С. С., 2017

жестких и мягких кислот и оснований [5]. Для описания химической активности молекул методами квантовой химии рассчитываются их параметры — DFT-индексы реакционной способности (ИРС), величины которых характеризуют активность как молекулы в целом, так и отдельных реакционных центров (локальные ИРС).

Данные ИРС носят названия «химический электронный потенциал» (μ), «глобальная жесткость» (η) и «электрофильность» (ω) и представляют собой отнесенные ко всей молекуле или другой химической частице параметры, используемые в целях предсказания и описания химической реакционной способности и субстратной селективности. Для характеристики активности отдельных реакционных центров и описания позиционной селективности реакций введены локальные интерпретации этих параметров [6], опирающиеся на локальный ИРС — функцию Фукуи (FF) — и представляющие собой произведения глобальных параметров на FF. В частности, локальная электрофильность $\omega(\text{лок})$ есть характеристика реакционного центра: $\omega(\text{лок}) = FF \cdot \omega$.

Здесь $\mu = 0.5[E(\text{HOMO}) + E(\text{LUMO})]$, $\eta = 0.5[E(\text{LUMO}) - E(\text{HOMO})]$, $\omega = 0.5\mu^2/\eta$, $E(\text{HOMO})$ — энергия высшей занятой молекулярной орбитали, а $E(\text{LUMO})$ — энергия низшей вакантной [6]. Все эти ИРС получены аналитически при решении уравнений Кона — Шэма и дальнейшем анализе зависимостей энергии системы от числа электронов [9].

Результаты и их обсуждение

Расчет структур молекул замещенных XPhSO_2Cl и их анионов (в качестве модели предельной структуры, в которую превращается сульфонилхлорид при нуклеофильной атаке), а также реагентов — спиртов, анилина и воды (и их катионов как предельных структур после переноса электрона на электрофил — сульфонилхлорид) — проведен программным комплексом ADF 2014.04 [4] на уровне теории DFT M06/6-311+G* с учетом неспецифической сольватации в рамках метода SMD. Расчет зарядов в нейтральных структурах и их предельных ионных аналогах осуществлен по схеме Хиршфельда.

Относительная нуклеофильность спиртов и анилина рассчитана по выражению [7]

$$\omega^- = 0.5\eta(\text{Nu}) \cdot [\mu(\text{Nu}) - \mu(\text{E})]^2 / [\eta(\text{Nu}) + \eta(\text{E})]^2. \quad (4)$$

Таблица 1

Относительная нуклеофильность анилина при аминоллизе XPhSO_2Cl

Среда	ω^- относительно	ω^-	$\sigma(\text{X})$ [1]
MeOH	PhSO ₂ Cl	0.1704	0
EtOH	PhSO ₂ Cl	0.1483	0
MeOH	4-MeOPhSO ₂ Cl	0.1233	-0.27
EtOH	4-MeOPhSO ₂ Cl	0.1028	-0.27
MeOH	4-NO ₂ PhSO ₂ Cl	0.3235	0.78
EtOH	4-NO ₂ PhSO ₂ Cl	0.3172	0.78

Таким образом, нуклеофильность спиртов (ω^-) по крайней мере на порядок ниже нуклеофильности анилина в тех же средах и при взаимодействии с теми же субстратами (табл. 1, 2). Это и объясняет с теоретической точки

зрения достаточно малую степень алкоголиза при аминоллизе арилсульфонилхлоридов, наблюдаемую экспериментально [2].

Таблица 2

**Относительная нуклеофильность спиртов и воды (ω^-)
при взаимодействии с $XPhSO_2Cl$ и электронные эффекты заместителей X**

ROH	ω^- относительно	$\omega^- ROH$	$\omega^- H_2O$	$\sigma(\text{para-X})$
MeOH	PhSO ₂ Cl	0.0393	0.0633	0
	4-MeOPhSO ₂ Cl	0.0150	0.0332	-0.27
	4-NO ₂ PhSO ₂ Cl	0.1170	0.1497	0.78
EtOH	PhSO ₂ Cl	0.0480	0.0792	0
	4-MeOPhSO ₂ Cl	0.0208	0.0486	-0.27
	4-NO ₂ PhSO ₂ Cl	0.1522	0.2071	0.78

Нуклеофильность воды также невелика, однако превосходит таковую спиртов, поэтому гидролиз при аминоллизе должен иметь место, а алкоголиз — в меньшей степени, но достаточно заметной, поскольку величины относительной нуклеофильности спиртов и воды соизмеримы. Данный эффект наблюдается и экспериментально [8].

Относительная нуклеофильность реагента зависит от электрофильности субстрата — сульфонилхлорида, что подтверждается зависимостью параметра ω^- (относительной нуклеофильности) от вида заместителя в субстрате. Параметр ω^- определяется σ -константой заместителя X в $XPhSO_2Cl$ (5). В соответствии с физическим смыслом этого параметра зависимость между ω^- и $\sigma(X)$ линейна степени риска всего 6 % (пример для метанола).

Вызвано это учетом взаимодействия между электрофилом и нуклеофилом при выводе соотношения (4) в соответствии с теорией относительной нуклеофильности [7] и соответствует представлению о увеличении электрофильности реакционного центра сульфонилхлорида — атома сульфонильной серы S(VI) — при увеличении акцепторных свойств заместителя X.

Соотношение между относительной нуклеофильностью метанола и электронным эффектом заместителя в сульфонилхлориде $XPhSO_2Cl$ имеет вид

$$\omega^- = (1.38 \pm 0.14) + (3.03 \pm 0.29) \cdot \sigma(X),$$

$$R = 0.995, SD = 0.23, N = 3, P = 0.062. \quad (5)$$

Библиографический список

1. Днепроvский А. С., Темникова Т. И. Теоретические основы органической химии. Л. : Химия, 1979. 520 с.
2. Курицын Л. В., Кустова Т. П., Садовников А. И., Калинина Н. В., Ключев М. В. Кинетика реакций ацильного переноса. Иваново : Иван. гос. ун-т, 2006. 260 с.
3. Кустова Т. П. Аренсульфонилирование аминов, аренкарбогидразидов и аминокислот: влияние строения реагентов и эффекты среды : дис. ... д-ра хим. наук : 02.00.03, 02.00.04. Иваново, 2008. 300 с.
4. Baerends E. J. et al. ADF2014. SCM. Theoretical Chemistry. Vrije Universiteit. Amsterdam. The Netherlands. 2014. URL: <http://www.scm.com> (дата обращения: 02.04.2017).

5. Concepts and Methods in Modern Theoretical Chemistry : Electronic Structure and Reactivity / ed. by S. Ghosh, P. K. Chattaraj. New York : CRC Press, 2013. 450 p.
6. Fuentelba P., David J., Guerra D. Density functional based reactivity parameters // J. Mol. Struct. 2010. Vol. 943. P. 127—137.
7. Jaramillo P., Fuentelba P., Perez P. Nucleophilicity scale for n- and π -nucleophiles // Chem. Phys. Lett. 2006. Vol. 427, № 4—6. P. 421—425.
8. Koo I. S., Yang K., Shin H. B., An S. K., Lee J. P., Lee I. Stoichiometric solvation effects. Solvolysis of isopropylsulfonyl chloride // Bull. Korean Chem. Soc. 2004. Vol. 25, № 5. P. 699—703.
9. Liu S.-B. Conceptual density functional theory and some recent developments // Acta Phys.-Chim. Sin. 2009. Vol. 25, № 3. P. 590—600.

УДК 544.424:544.183.25:544.362.4

Е. Н. Крылов, Д. В. Цветкова

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ АКТИВНОСТИ НИТРОНИЙ-ГАЛОГЕНИДОВ В РЕАКЦИЯХ АРОМАТИЧЕСКОГО НИТРОВАНИЯ И ГАЛОГЕНИРОВАНИЯ

Квантово-химическая оценка активности нитроний-галогенидов на основе термодинамических расчетов свободной энергии Гиббса реакции распада этих соединений в сочетании с анализом локальной электрофильности по атомам азота и галогенов позволяет оценить вероятность участия нитроний-галогенидов в реакциях нитрования и бромирования.

Ключевые слова: нитроний-галогениды, свободная энергия Гиббса, локальная электрофильность.

Quantum-chemical estimation of nitril halides activities based on Gibbs free energy thermodynamic calculation, disintegration of these compounds in combination with local electrophilicity analysis of nitrogen and halogen atoms allows to estimate the probability of their participation in nitration and bromination reactions.

Key words: nitril halides, Gibbs free energy, local electrophilicity.

Введение

Арилбромиды представляют собой весьма используемые в органическом синтезе субстраты. Они широко применяются в последнее время для реакций кросс-сочетания, катализируемых Pd, Ni и Cu, в которых образуются новые связи C—C, C—N, C—O и C—S [24, 22, 33, 18, 37]. Арилбромиды также являются классическими прекурсорами для синтеза органолитиевых реагентов и реактивов Гриньяра [18] и генерации ариновых структур в ароматическом нуклеофильном замещении [35].

Обычные (классические) методы ароматического бромирования путем воздействия элементарного брома в присутствии катализатора ($AlBr_3$) оставляют неиспользованным один атом брома, выделяющийся в виде бромоводорода [16]. Кроме того, применение указанных реагентов осложнено их агрессивностью. В связи с этим возрастает интерес к новым методам синтеза

арилбромидов, основанных на использовании менее агрессивных, более селективных и безопасных реагентов, удовлетворяющих принципам «зеленой химии» [27], и растворителей, пригодных для несложной рециркуляции.

Одним из таких методов является окислительное бромирование ароматических соединений в регенерируемых средах, которое позволяет полностью использовать атомы брома с одновременной рециркуляцией органического растворителя [17]. В частности, к этим способам относится бромирование ароматических субстратов комплексом бромида и нитрата калия в уксусной кислоте [14]. Поскольку уксусная кислота недостаточно электрофильна и летуча, целесообразна замена ее на трифторуксусную кислоту, которая более летуча, легко регенерируется [20] и обладает высокой электрофильностью, необходимой для инициирования реакций ароматического электрофильного замещения [25].

Одновременно с реакцией бромирования может происходить и реакция нитрования, так как нитроний-галогениды способны быть источниками и электрофильного нитроний-катиона в реакции $\text{NO}_2\text{X} \rightarrow \text{NO}_2^+ + \text{X}^-$, и электрофильного галоген-катиона в реакции $\text{NO}_2\text{X} \rightarrow \text{NO}_2^- + \text{X}^+$. Соотношение между этими параллельными потоками зависит от различия в электроотрицательности групп NO_2 и X , а также от соотношения свободных энергий указанных реакций и локальной электрофильности образующихся частиц.

Поскольку реальным бромирующим реагентом в среде AcOH-KBr-KNO_3 является нитроний-бромид (нитрилбромид, NO_2Br) [14], представлялось целесообразным провести теоретический анализ вероятности прохождения реакций бромирования и нитрования алкилбензолов этим реагентом в сопоставлении с активностью в реакциях нитрования и галогенирования других нитроний-галогенидов как методами квантовой химии, в том числе на основе количественной теории ЖМКО Пирсона [34], так и термодинамики.

Результаты и их обсуждение

Расчет нитроний-галогенидов и их ионных структур проведен программным комплексом ADF2014 [38] на уровне теории DFT с обменно-корреляционным потенциалом M06 [39] и корреляционно-согласованным базисом aug-cc-pvTZ [15]. Для учета влияния растворителя на параметры исследуемых структур использован метод IEF-PCM [36]. Заряды на атомах галогенов и азота определены по схеме Хиршфельда [31], которая считается наилучшей для расчета функций Фукуи [26], поскольку позволяет избежать появления их нереалистичных значений в отличие от других схем разделения зарядов.

В качестве примера проведен расчет свободных энергий Гиббса исходного нитроний-фторида и продуктов его распада — нитроний-катиона и фторид-аниона — квантово-химическим программным комплексом ADF2014 [38] на уровне теории M06/aug-cc-pvTZ, а также на этом уровне, дополненном одним из комплексов теоретических методов G2, G3 или G4 [19]. Величина свободной энергии реакции распада нитроний-фторида (ΔGr) оценивается по известному термодинамическому соотношению

$$\Delta\text{Gr} = G(\text{NO}_2^+) + G(\text{F}^-) - G(\text{NO}_2\text{F}). \quad (1)$$

Первоначально был использован метод CBS-QB3, который представляется достаточно надежным при расчете свободных энергий реакций различных

соединений азота, в том числе окисления гидроксилamina в азотной кислоте [23], энтальпии образования и энергий связи C—N в нитроалканах [1], энергии ППЭ окисления этилена до различных продуктов (этиленоксида, ацетальдегида, винилового спирта) [4], реакции разложения протонированной щавелевой кислоты [30]. Данный многоуровневый композитный метод рекомендован как один из лучших [29], хотя он и уступает таким методам, как, например, CBS-APNO. Кроме того, были использованы современные методы G2, G3 и G4 (табл. 1).

Таблица 1

**Свободные энергии диссоциации нитроний-фторида в среде AcOH.
Квантово-химический расчет: ADF2014, PCM, AcOH ($\epsilon = 6.25$)**

Уровень теории	G(NO ₂ F)	G(NO ₂ ⁺)	G(F ⁻)	ΔGr
G2	-304.575362	-204.598286	-99.885631	57.38
G3	-304.777134	-204.744518	-99.938806	58.87
G4	-304.837492	-204.786872	-99.962045	55.58
CBS-QB3/SMD	-304.599586	-204.615191	-99.897501	54.52
M06/aug-cc-pvTZ	-304.885704	-204.8128	-99.977673	59.76

Примечание. Величины G(NO₂F), G(NO₂⁺), G(F⁻) — в единицах Хартри, ΔGr — ккал/моль.

Однако, как следует из данных табл. 1, увеличение сложности расчета и изменение схемы учета неспецифической сольватации не изменяют порядка величины свободной энергии Гиббса исследуемой реакции, поэтому для настоящего исследования вполне достаточно уровня теории M06/aug-cc-pvTZ, чтобы оценить вероятные пути распада нитроний-галогенидов (табл. 2). В табл. 2—4 представлены данные для всех нитроний-галогенидов, позволяющие определить их способности как к нитрованию, так и к галогенированию.

Таблица 2

**Квантово-химические параметры нитроний-галогенидов (NO₂X, X = F, Cl, Br).
Расчет в газовой фазе и в среде AcOH (IEF-PCM, $\epsilon = 6.25$)**

X	Среда	G(Гиббс)	Q(X)	Q(N)	E(HOMO)	E(LUMO)
F	Газ	-304.883738	-0.1436	0.3644	-0.38632	-0.09515
	AcOH	-304.885704	-0.1601	0.3717	-0.38432	-0.09054
Cl	Газ	-665.264105	-0.0956	0.3251	-0.34475	-0.10828
	AcOH	-665.265706	-0.0933	0.3300	-0.34244	-0.10458
Br	Газ	-2779.181517	-0.0764	0.3055	-0.32839	-0.11741
	AcOH	-2779.183394	-0.0566	0.3070	-0.32577	-0.11182

Примечание. Здесь и далее: свободная энергия Гиббса G(Гиббс), E(HOMO), E(LUMO) — в единицах Хартри, Q — e.

Расчет фрагментов нитроний-галогенидов требуется для оценки функций Фукуи (FF) по реакционным центрам — атому азота и атомам галогенов — в соответствии с соотношением (6).

Таблица 3

**Свойства ионов фрагментов нитроний-галогенидов (NO₂X, X = F, Cl, Br).
Расчет в среде AcOH (IEF-PCM, ε = 6.25)**

X	Ион	G(Гиббс)	Q(X)	Q(N)
F	Катион	-304.49599	0.1283	0.4727
	Анион	-305.03893	-0.7869	0.1960
Cl	Катион	-664.96287	0.0251	0.5469
	Анион	-665.35343	-0.3452	0.1260
Br	Катион	-2778.89324	0.0091	0.5548
	Анион	-2779.27288	-0.3168	0.1127

Расчет общих (глобальных) квантово-химических параметров (μ , η , ω) молекул нитроний-галогенидов требуется для оценки локальной электрофильности (по соотношению 2), характеризующей электроноёмкость реакционного центра [$\omega(\text{лок})$] — способность воспринимать электронную плотность в процессе химического взаимодействия.

Таблица 4

Квантово-химические параметры реакционной способности NO₂X в среде AcOH

X	$-\mu$	η	ω	FF(X)E ⁺	FF(X)Nu ⁻	FF(N)E ⁺	FF(N)Nu ⁻
F	6.4609	3.9971	5.2216	0.6268	0.2884	0.1757	0.1010
Cl	6.0821	3.23263	5.7151	0.2519	0.1184	0.2040	0.2169
Br	5.9538	2.9110	6.0886	0.2602	0.0657	0.1943	0.2478

Примечание. μ , η , ω — в eV, FF — e.

Электронный химический потенциал (μ), жесткость (η) и электрофильность рассчитаны по соотношениям (2 — 4) [21, 28]

$$\mu = 0.5 \cdot 27.2116[E(\text{LUMO}) + E(\text{HOMO})]. \quad (2)$$

$$\eta = 0.5 \cdot 27.2116[E(\text{LUMO}) - E(\text{HOMO})]. \quad (3)$$

$$\omega = 0.5\mu^2/\eta. \quad (4)$$

$$\omega(\text{лок}) = \omega\text{FF}. \quad (5)$$

Функции Фукуи определены как

$$\text{FF} = Q(\text{нейтр.}) - Q(\text{ион}). \quad (6)$$

Здесь $Q(\text{нейтр.})$ — заряд на атоме в нейтральном состоянии частицы, $Q(\text{ион})$ — заряд на этом же атоме в состоянии иона (катиона или аниона в соответствии с теоретическими основами теории функции Фукуи [32]). Коэффициент 27.2116 переводит численные значения μ , η и ω из единиц Хартри в eV, как это принято в литературе [21].

В соответствии с теоретическими основами количественной теории ЖМКО [28] параметр $\text{FF}(\text{X})\text{E}^+$ и связанный с ним $\omega(\text{X})(\text{лок})\text{E}^+$ характеризуют электрофильную реакционную способность атома галогена, $\text{FF}(\text{X})\text{Nu}^-$ и $\omega(\text{X})(\text{лок})\text{Nu}^-$ — их нуклеофильную реакционную способность. Аналогично электрофильную реакционную способность атома азота (группы NO₂)

характеризуют параметры $FF(N)E^+$ и $\omega(\text{лок}) (N)E^+$, а нуклеофильную реакционную способность — параметры $FF(N)Nu^-$ и $\omega(\text{лок}) (N)Nu^-$ (табл. 5).

Таблица 5

Локальные индексы реакционной способности NO_2X по атомам N и X

ω	$\omega(X)(\text{лок})E^+$	$\omega(X)(\text{лок})Nu^-$	$\omega(\text{лок}) (N)E^+$	$\omega(\text{лок}) (N)Nu^-$
X	1	2	3	4
F	3.2729	1.5059	0.9174	0.5274
Cl	1.4396	0.6767	1.1659	1.2396
Br	1.5843	0.4000	1.1830	1.5088

Примечание. $\eta(\text{лок})$ — eV.

Поэтому по способности к нитрованию нитроний-галогениды должны располагаться в ряд $NO_2Br > NO_2Cl > NO_2F$, так как у атома галогена при этом наблюдается минимальная локальная электрофильность в состоянии аниона, а у атома азота — максимальная электрофильность в состоянии катиона. Как видно из табл. 5, в колонках 2 и 3 имеет место максимум электрофильности для атома азота (1.183) и одновременно минимум для брома (0.400), что соответствует нитроний-бромиду.

Наблюдаемая картина изменения локальной нуклеофильности (табл. 5, колонка 4) показывает, что от нитроний-фторида к нитроний-бромиду увеличивается нуклеофильная реакционная способность по атому азота, а значит, растет электрофильная реакционная способность по атому галогена, что способствует реакции электрофильного галогенирования. В меньшей степени (колонка 3) увеличивается электрофильная реакционная способность по атому азота. Электрофильная реакционная способность по атому галогена (колонка 1) уменьшается в этом же направлении (сверху вниз). Однако наблюдаемый ряд активности противоречит данным по электроотрицательности галогенов. По всей видимости, для корректного отображения реакционной способности требуется учет специфической сольватации.

Определение реакционной способности нитроний-галогенидов проведено также путем оценки свободных энергий их диссоциации на катионы нитрония и анионы галогенов для реакции нитрования и катионы галогенов и нитрит-анионы в случае галогенирующей реакционной способности. Расчет свободных энергий нитроний-галогенидов и продуктов их диссоциации в среде AcOH осуществлен программным комплексом ADF2014 на уровне теории M06/aug-cc-pv-TZ с учетом влияния растворителя методом IEF-PCM как непрерывного диэлектрического континуума с диэлектрической постоянной $\epsilon = 6.25$ для температуры 298 K (табл. 6).

Таблица 6

Свободная энергия Гиббса нитроний-галогенидов и продуктов их диссоциации (ΔG), единицы Хартри

NO_2X	$-\Delta G$	X^+	$-\Delta G$	X^-	$-\Delta G$	NO_2^+	NO_2^-
F	304.88570	F	99.10655	F	99.97767	204.81280	205.23080
Cl	665.26571	Cl	459.70860	Cl	460.37805	»	»
Br	2779.18401	Br	2573.68815	Br	2574.28893	»	»

Таблица 7

Изменение свободной энергии Гиббса для реакций диссоциации NO_2X

Реакция	$\Delta\Delta G$, ккал/моль
$\text{NO}_2\text{F} = \text{NO}_2^+ + \text{F}^-$	59.8
$\text{NO}_2\text{F} = \text{NO}_2^- + \text{F}^+$	344.1
$\text{NO}_2\text{Cl} = \text{NO}_2^+ + \text{Cl}^-$	47.0
$\text{NO}_2\text{Cl} = \text{NO}_2^- + \text{Cl}^+$	204.8
$\text{NO}_2\text{Br} = \text{NO}_2^+ + \text{Br}^-$	51.6
$\text{NO}_2\text{Br} = \text{NO}_2^- + \text{Br}^+$	166.3

Как показывает сопоставление результатов табл. 7, по электрофильной галогенирующей способности NO_2X располагаются в ряд $\text{NO}_2\text{Br} > \text{NO}_2\text{Cl} > \text{NO}_2\text{F}$, соответствующий электроотрицательности X . По способности к нитрованию эти соединения располагаются в ряд $\text{NO}_2\text{Cl} > \text{NO}_2\text{Br} > \text{NO}_2\text{F}$, соответствующий литературным данным [14], однако не согласованный с рядом по электрофильности. Причины такого расхождения пока неясны, хотя можно предполагать, что для корректного отображения локальной электрофильности требуется квантово-химический учет специфической сольватации.

При этом для учета специфической сольватации необходима оценка энергий связывания X^+ с молекулами воды, которая проведена путем расчета отдельных молекул воды и катионов галогенов и их комплексов прилипания по одной из неподеленных пар атома кислорода $X^+\dots\text{OH}_2$. Эти комплексы образуются на дистанции 1.374 Å для F^+ , 1.716 Å для Cl^+ , 1.873 Å для Br^+ и 2.432 Å для NO_2^+ . Ряд по энергии связывания имеет вид $\text{F} > \text{Cl} > \text{Br} > \text{NO}_2$ (по данным табл. 8). Этот ряд показывает, что при конкуренции потоков нитрования и галогенирования преобладать будет нитрование. Естественно, что данное заключение, так же как и все упомянутые выше, требует экспериментальной проверки.

Таблица 8

Свободные энергии Гиббса $\Delta G_{\text{связ}}$ (298.15 К) связывания катионов X^+ и NO_2^+ с H_2O в среде AcOH

X	$G(X^+)$ и $G(\text{NO}_2^+)$	$G(X^+\dots\text{OH}_2)$	$\Delta G_{\text{связ}}$, ккал/моль
F	-99.10655	-175.85491	-203.25
Cl	-459.70860	-536.30067	-105.18
Br	-2573.68815	-2650.24080	-84.29
NO_2	-204.81280	-281.24269	-3.41

Заключение

Квантово-химический анализ реакционной способности нитроний-галогенидов, в принципе, может адекватно оценить ее. Предполагается, что нитроний-фторид будет наиболее подходящим реагентом для проведения реакции нитрования. Это совпадает с экспериментальными данными по нитрованию и бромированию гетероциклических соединений нитроний-галогенидами [14].

Аналогичный подход на основе квантово-химических индексов реакционной способности был успешно использован в процессе анализа реакционной способности ацетанилидов при гидролизе [13], тетразапорфина при бромировании [5], кислотной диссоциации ароматических сульфокислот [7, 11], фенэтилбромидов в S_N -реакциях [9], арилсульфонилхлоридов в S_NS -реакциях [10], полиметилбензолов в реакции ароматического бромирования [2], эфиров карбоновых кислот при аминировании [12], при диагностике механизма ароматического гидродегалогенирования [3, 8]. Обзор по некоторым аспектам приложения этого подхода приведен в публикации [6].

Библиографический список

1. Аристов И. В., Егоров Л. Д., Шамов А. Г., Храповский Г. Б. Энтальпии образования и энергии связи $C-NO_2$ нитропентанов // Вестник Казанского государственного университета. 2011. Вып. 1. С. 7—10.
2. Белякова М. В., Зубанова Е. А., Крылов Е. Н. Квантово-химические DFT-индексы реакционной способности полиметилбензолов как дескрипторы селективности реакции бромирования // Известия вузов. Химия и химическая технология. 2013. Т. 56, № 11. С. 23—28.
3. Груздев М. С., Вирзум Л. В., Крылов Е. Н. Реакция ароматического гидродегалогенирования: квантово-химическая диагностика механизма // Бултеровские сообщения. 2015. Т. 41, вып. 2. С. 115—120.
4. Давтян А. Г., Асатрян Р. С., Арсентьев С. Д., Банташян А. А. Изучение поверхности потенциальной энергии взаимодействия атома кислорода с этиленом // Химический журнал Армении. 2015. Т. 68, № 3. С. 3358—3363.
5. Ишуткина М. В., Хелевина О. Г., Крылов Е. Н., Александрыйский В. В., Кофман О. И. Бромирование магниевого комплекса 5,10,15,20-тетразапорфина // Журнал органической химии. 2015. Т. 51, вып. 11. С. 1681—1687.
6. Крылов Е. Н. Дескрипторы органических реакций: квантово-химические индексы реакционной способности // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2014. Вып. 2. С. 39—53.
7. Крылов Е. Н. Диссоциация ароматических сульфокислот в газовой и водной фазах: квантово-химический расчет pK_a // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2015. Вып. 1. С. 32—39.
8. Крылов Е. Н. Квантово-химическая диагностика механизма реакции ароматического гидродегалогенирования // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2014. Вып. 2. С. 53—61.
9. Крылов Е. Н. Нуклеофильное замещение в фенэтилбромидах как функция локальной электрофильности // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2015. Вып. 1. С. 40—50.
10. Крылов Е. Н., Богданова Т. С. Квантово-химический анализ реакции ацилирования анилинов замещенными бензолсульфонилгалогенидами // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2013. Вып. 2. С. 47—55.
11. Крылов Е. Н., Груздев М. С., Вирзум Л. В. Кислотность ароматических сульфокислот в газовой и водной фазах // Бултеровские сообщения. 2015. Т. 42, вып. 6. С. 117—123.
12. Крылов Е. Н., Ефимова Д. О. Квантово-химический аспект реакции аминирования замещенных производных карбоновых кислот // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2013. Вып. 2. С. 56—63.

13. Крылов Е. Н., Логинова М. В. Гидролиз замещенных ацетанилидов как функция параметров реакционного центра // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2016. Вып. 2. С. 56—61.
14. Кулманакова Ю. Ю. Нитраты щелочных металлов в синтезах некоторых нитро- и галоидсодержащих органических соединений : автореф. дис. ... канд. хим. наук. Томск, 2009. 20 с.
15. Лузанов А. В., Бочеваров А. Д., Шишкин О. В. О хартри-фоковской дипольной поляризуемости молекул, ионов и дефектов в базисах даннинговского типа // Журнал структурной химии. 2001. Т. 42, № 2. С. 357—362.
16. Марч Дж. Органическая химия : в 4 т. М. : Мир, 1987. Т. 2. 504 с.
17. Махоньков Д. И., Чепраков А. В., Белецкая И. П. Окисление солями металлов : окислительное галогенирование бензола и галогенбензолов, прототируемое ацетатами Со(III) и Мп(III) в трифторуксусной кислоте и ее водных растворах // Журнал органической химии. 1986. Т. 22, вып. 4. С. 681—688.
18. Смит В. А., Дильман А. Д. Основы современного органического синтеза. М. : БИНОМ, 2009. 750 с.
19. Туровцев В. В., Петров И. А., Орлов Ю. Д. Выбор оптимального квантово-химического метода определения полной энергии молекул, содержащих атомы третьего периода // Вестник Тверского государственного университета. Сер.: Физика. 2004. № 4 (6). С. 185—188.
20. Фиалков Ю. Я. Растворитель как средство управления химическим процессом. Л. : Химия, 1990. 240 с.
21. A Matter of Density : Exploring the Electron Density Concept in the Chemical, Biological, and Materials Sciences / ed. by N. Sukumar. New York : Wiley, 2013. 318 p.
22. Alonso F., Beletskaya I. P. Non-conventional methodologies for transition-metal catalysed carbon-carbon coupling : a critical overview. Pt. 1: The Heck reaction // Tetrahedron. 2005. Vol. 61, № 50. P. 11771—11835.
23. Ashcraft R. W., Raman S., Green W. H. Ab initio aqueous thermochemistry: application to the oxidation of hydroxylamine in nitric acid solution // J. Phys. Chem. B. 2007. Vol. 111, № 41. P. 11968—11983.
24. Beletskaya I. P., Cheprakov A. V. The Heck reaction as a sharpening stone of palladium catalysis // Chem. Rev. 2000. Vol. 100, № 8. P. 3009—3066.
25. Brown H. C., Wirkkala R. A. Trifluoroacetic acid as a medium for electrophilic substitution reactions. Rates and isomer distributions for the bromination, nitration, and mercuriation of benzene and toluene in trifluoroacetic acid // J. Am. Chem. Soc. 1966. Vol. 88, № 7. P. 1447—1452.
26. Chandra A. K., Nguyen M. T. Fukui function and local softness as reactivity descriptors // Chemical Reactivity Theory : a Density Functional View / ed. by P. K. Chattaraj. Boca Raton : CRC Press, 2009. P. 163—177.
27. Chupakhin O. N., Charushin V. N. S_NH reactions: aspects of creation of new environmentally acceptable technologies // Green Chemistry in Russia / INCA. Venezia, 2005. P. 19—28.
28. Concepts and Methods in Modern Theoretical Chemistry / ed. by S. K. Ghosh, P. K. Chattaraj. New York : CRC Press, 2013. 450 p.
29. Electronic Structure Modeling / ed. by C. Trindle, D. Shillady. Boca Raton : CRC Press, 2008. 505 p.
30. Ervasti H. K., Lee R., Burgers P. C., Ruttink P. J. A., Terlouw J. K. Dissociation of protonated oxalic acid into H₃O⁺ + CO₂ + CO: an experimental and SBC-QB3 computational study // Int. J. Mass. Spectrom. 2006. Vol. 249—250. P. 240—251.
31. Hirshfeld F. L. Bonded atom fragments for describing molecular charge densities // Theor. Chim. Acta. 1977. Vol. 44, № 1. P. 129—138.
32. Islam N., Chosh D. C. On the electrophilic character of molecules through its relation with electronegativity and chemical hardness // Int. J. Model. 2012. Vol. 13, № 2. P. 2160—2175

33. *Lamblin M., Nassar-Hardy L., Hierso J. C., Fouquet E., Felpin F. X.* Recyclable heterogeneous palladium catalysts in pure water: sustainable developments in Suzuki, Sonogashira and Tsuji-Trost reactions // *Adv. Synth. Catal.* 2010. Vol. 352. P. 33—79.
34. *Pearson R. G.* Chemical Hardness. Weinheim : Wiley-VCH, 1997. 198 p.
35. *Tadross P. M., Stoltz B. M.* A comprehensive history of arynes in natural product total synthesis // *Chem. Rev.* 2012. Vol. 112, № 6. P. 3550—3557.
36. *Tomasi J., Mennucci B., Cancès B.* The IEF version of the PCM solvation method: an overview of a new method addressed to study molecular solutes at the QM ab initio level // *J. Mol. Struct.* 1999. Vol. 464, iss. 1—3. P. 211—226.
37. *Trzeciak A. M., Ziolkowski J.* Structural and mechanistic studies of Pd-catalyzed C-C bond formation: the case of carbonylation and Heck reaction // *J. Coord. Chem. Rev.* 2005. Vol. 249. P. 2308—2322.
38. *Valiev M., Bylaska E. J., Govind N. et al.* NWChem: a comprehensive and scalable open-source solution for large scale molecular simulations // *Comput. Phys. Commun.* 2010. Vol. 181, iss. 9. P. 1477—1489.
39. *Zhao Y., Truhlar D. G.* The M06 suite of density functionals for main group thermochemistry, thermochemical kinetics, noncovalent interactions, excited states, and transition elements : two new functionals and systematic testing of four M06-class functionals and 12 other functionals // *Theor. Chem. Acc.* 2006. Vol. 120. P. 215—241.

СРАВНЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ РАЗЛИЧНЫХ ВЕРСИЙ МЕТОДА ЛУКАСА — КАНАДЕ

Предложена модификация классического метода Лукаса — Канаде поиска векторов движения между парой кадров, использующая матрицу Гессiana второго кадра. Дано определение радиуса сходимости алгоритма, позволяющее эффективно сравнивать алгоритмы поиска векторов движения. Произведен сравнительный анализ эффективности классического алгоритма Лукаса — Канаде.

Ключевые слова: метод Ньютона, оптический поток, метод Лукаса — Канаде, Гессиан, Якобиан, радиус сходимости.

The modification of the classical Lucas — Kanade method for find optical flow between two frames using the Hessian matrix for the second frame was proposed. The convergence radius definition of the algorithm was given. The effectiveness analyze of the various Lucas — Kanade algorithms was produced.

Key words: optical flow, Lucas — Kanade, Hessian, Jacobian, the radius of convergence.

Введение

Алгоритм Лукаса — Канаде (Lucas — Kanade) [4, 9] является одним из наиболее эффективных методов нахождения межкадрового движения. При обработке видеоданных он используется фактически повсеместно [5—8].

Этот алгоритм на входе получает пару кадров (f, g) и некоторую область U на первом кадре. На выходе он выдает вектор сдвига $v = (a_0, a_1)$ такой, что кадр f на области U наилучшим образом аппроксимируется в виде $g(x + a_0, y + a_1)$ (см. формулу (1)).

Если кадр f разбит на непересекающиеся области U_i , то, найдя для каждой из них свой вектор сдвига v_i , мы получим вектор сдвига для каждой точки на кадре f . Построенное таким образом векторное поле называется оптическим потоком. Его нахождение является одной из основных задач при сжатии видеоинформации.

Эффективность алгоритма Лукаса — Канаде подтверждается его широким применением [10]. Но математическое обоснование условий сходимости метода на сегодняшний день недостаточно полно. Это особенно становится актуальным при поиске обобщений метода для нахождения не только сдвигов, но и преобразований плоскости более общего вида: поворотов, растяжений, общих аффинных и даже проективных преобразований [1, 2, 3].

В параграфе 1 вводятся необходимые в дальнейшем сведения о классическом методе Лукаса — Канаде. В параграфе 2 предлагается усиление метода с использованием вторых производных от функции яркости $f(x, y)$. В параграфе 3 вводится понятие радиуса сходимости метода. В параграфе

фе 4 приводятся результаты численных расчетов, показывающих пределы применимости рассмотренных методов в различных случаях.

1. Классический метод Лукаса — Канаде

1.1. Постановка задачи поиска оптического потока. Алгоритм Лукаса — Канаде [4, 9] представляет собой метод поиска оптического потока на последовательности кадров. В дальнейшем мы будем рассматривать алгоритм применительно лишь к одной паре кадров.

Пусть $f(x, y)$ и $g(x, y)$ — пара матриц целых чисел (серых изображений) размером $m_x \times m_y$. Элементы матриц представляют собой интенсивности яркостей точек (пикселей) на изображении. Пусть U_f — множество целочисленных координат точек некоторой области изображения f :

$$U_f = \{u_i : (x_i, y_i), i = 1, \dots, K\}, 0 \leq x_i < m_x, 0 \leq y_i < m_y,$$

где K — количество точек области.

Будем искать оптический поток в области U_f в виде сдвига

$$A(u) = A(x, y) = (x + a_0, y + a_1)$$

на вектор (a_0, a_1) . Задача поиска оптического потока сводится к задаче минимизации функционала:

$$S(a_0, a_1) = \sum_{u \in U_f} (f(A(u)) - g(u))^2. \quad (1)$$

Другими словами, для области U_f требуется найти вектор сдвига (a_0, a_1) на паре кадров f и g такой, чтобы сумма квадратов отклонений значений функций f и g в данных точках была минимальна.

1.2. Метод Лукаса — Канаде. В классическом алгоритме Лукаса — Канаде для решения задачи (1) используется модификация итеративного метода последовательных приближений, а именно метод Ньютона — Рафсона. Рассмотрим его подробнее.

Пусть $a_n = (a_{0n}, a_{1n})$ — вектор сдвига на n -м шаге. Процесс итераций для решения задачи (1) имеет вид

$$a_{n+1} = a_n - (J^T J)^{-1} J^T F,$$

где F — вектор-столбец, элементами которого являются величины отклонений $f(A(u_i)) - g(u_i)$, $i = 0, \dots, K - 1$, т. е.

$$F = (\Delta(u_0), \Delta(u_1), \dots, \Delta(u_{K-1}))^T,$$

где $\Delta(u_i) = f(A(u_i)) - g(u_i)$.

Пусть J — матрица частных производных от $f(A(u_i))$ по параметрам a_0 и a_1 (Якобиан):

$$J_{K \times 2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(A(u_0))}{\partial a_0} & \frac{\partial f(A(u_0))}{\partial a_1} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f(A(u_{K-1}))}{\partial a_0} & \frac{\partial f(A(u_{K-1}))}{\partial a_1} \end{pmatrix}.$$

Частная производная функции $f(A(v))$ по параметру a_i в общем виде представима следующим соотношением:

$$\frac{\partial f(A(u))}{\partial a_i} = \left(f'_x(A(u)) \frac{\partial A_x(u)}{\partial a_i} + f'_y(A(u)) \frac{\partial A_y(u)}{\partial a_i} \right),$$

где

$$f'_x(A(u)) = f'_x(x + a_0, y + a_1)$$

и

$$f'_y(A(u)) = f'_y(x + a_0, y + a_1)$$

— численные аппроксимации производных по аргументам x и y в точке $(x + a_0, y + a_1)$;

$$\frac{\partial A_x(u)}{\partial a_i} \quad \text{и} \quad \frac{\partial A_y(u)}{\partial a_i}$$

— частные производные от A_x, A_y по a_i , значения которых равны

$$\begin{aligned} \frac{\partial A(u)}{\partial a_0} &= \left(\frac{\partial A_x(u)}{\partial a_0}, \frac{\partial A_y(u)}{\partial a_0} \right) = (1, 0) \\ \frac{\partial A(u)}{\partial a_1} &= \left(\frac{\partial A_x(u)}{\partial a_1}, \frac{\partial A_y(u)}{\partial a_1} \right) = (0, 1). \end{aligned}$$

Замечание 1. Также частную производную функции $f(A(v))$ можно представить в виде скалярного произведения вектора градиента изображения f в точке u на вектор частных производных функции A :

$$\frac{\partial f(A(u))}{\partial a_i} = \left\langle (f'_x(A(u)), f'_y(A(u))), \frac{\partial A(u)}{\partial a_i} \right\rangle.$$

Замечание 2. $(J^T J)^{-1} J^T$ — псевдообратная матрица для J , найденная посредством метода наименьших квадратов.

Если $\det(J^T J) = 0$, то необходимо выполнить регуляризацию матрицы $J^T J$. Для этого к элементам, стоящим на главной диагонали, нужно прибавить некоторое малое число σ . Таким образом, метод с регуляризацией можно представить в следующем виде:

$$a_{n+1} = a_n - (J^T J + \sigma E)^{-1} J^T F,$$

где E — единичная матрица.

Замечание 3. Итерационный процесс считается завершенным, если величина суммы квадратов отклонений (1) стала меньше некоторого заданного порога. Чем меньше пороговая величина, тем большая точность аппроксимации найденного вектора сдвига будет получена.

Выпишем формулы итерационного процесса. Пусть $a_n = (a_{0n}, a_{1n})$ — вектор сдвига на n -м шаге, вектор приращения обозначим через (w_x, w_y) , т. е. вектор сдвига на $(n + 1)$ -м шаге будет

$$a_{n+1} = (a_{0n} + w_x, a_{1n} + w_y). \quad (2)$$

Для нахождения (w_x, w_y) имеем систему двух линейных уравнений от двух переменных:

$$\begin{cases} S_x + w_x \cdot S_{xx} + w_y \cdot S_{xy} = 0, \\ S_y + w_x \cdot S_{xy} + w_y \cdot S_{yy} = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} S_x &= 2 \sum_{u \in U_f} f'_x(A(u))\Delta(u), \\ S_y &= 2 \sum_{u \in U_f} f'_y(A(u))\Delta(u), \\ S_{xx} &= 2 \sum_{u \in U_f} f'_x(A(u))^2, \\ S_{xy} &= 2 \sum_{u \in U_f} f'_x(A(u))f'_y(A(u)), \\ S_{yy} &= 2 \sum_{u \in U_f} f'_y(A(u))^2. \end{aligned}$$

2. Обобщение метода Лукаса — Канаде

2.1. Сведение к методу Ньютона для системы уравнений 2×2 .

Нахождение локального минимума функции (1) можно свести к решению системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a_0} = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Найти аппроксимацию решения (4) можно посредством итеративного метода Ньютона:

$$a_{n+1} = a_n - z'(A(u))^{-1}z(A(u)),$$

где $z'(A(u))$ — матрица вторых производных от функции S размерностью 2×2 (Гессиан), а функция $z(A(u))$ соответствует

$$z(A(u)) = \left(\frac{\partial S}{\partial a_0}, \frac{\partial S}{\partial a_1} \right)^T. \quad (5)$$

При этом частная производная функции S по параметру a_i равна

$$\frac{\partial S}{\partial a_i} = 2 \sum_{u \in U_f} \Delta(u) \frac{\partial f(A(u))}{\partial a_i}, \quad (6)$$

где $\Delta(u) = f(A(u)) - g(u)$.

Подставив (6) в (5), получим:

$$z(A(u)) = 2 \sum_{u \in U_f} \begin{pmatrix} \Delta(u)f'_x(A(u)) \\ \Delta(u)f'_y(A(u)) \end{pmatrix}.$$

Матрица вторых производных $z'(A(u))$ является симметричной и представима в виде

$$z'(A(u)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 S}{\partial a_0^2} & \frac{\partial^2 S}{\partial a_0 \partial a_1} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial a_1 \partial a_0} & \frac{\partial^2 S}{\partial a_1^2} \end{pmatrix},$$

причем

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a_0 \partial a_1} = \frac{\partial^2 S}{\partial a_1 \partial a_0}.$$

Значения элементов матрицы вторых производных вычисляются посредством следующих формул:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S}{\partial a_0^2} &= 2 \sum_{u \in U_f} (f'_x(A(u))^2 + \Delta(u)f''_{xx}(A(u))), \\ \frac{\partial^2 S}{\partial a_0 \partial a_1} &= 2 \sum_{u \in U_f} (f'_x(A(u))f'_y(A(u)) + \Delta(u)f''_{xy}(A(u))), \\ \frac{\partial^2 S}{\partial a_1^2} &= 2 \sum_{u \in U_f} (f'_y(A(u))^2 + \Delta(u)f''_{yy}(A(u))), \end{aligned}$$

где $f''_{xx}(A(u))$, $f''_{xy}(A(u))$ и $f''_{yy}(A(u))$ — численные аппроксимации вторых производных по аргументам xx , xy и yy в точке $(x + a_0, y + a_1)$.

Выпишем формулы итерационного процесса для (2). Для нахождения (w_x, w_y) имеем систему двух линейных уравнений от двух переменных:

$$\begin{cases} S_x + w_x \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial a_0^2} + w_y \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial a_0 \partial a_1} = 0, \\ S_y + w_x \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial a_0 \partial a_1} + w_y \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial a_1^2} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

2.2. Связь обобщенного метода с классическим. Один шаг классического метода Лукаса — Канаде сводится к решению системы двух уравнений (3) от двух неизвестных. В свою очередь, шаг модифицированного метода сводится к решению похожей системы (7). Свободные члены у этих систем уравнений одинаковы, а коэффициенты перед неизвестными различны.

Пусть C — действительное число. Рассмотрим выражения:

$$\begin{aligned} &2 \sum_{u \in U_f} (f'_x(A(u))^2 + C\Delta(u)f''_{xx}(A(u))), \\ &2 \sum_{u \in U_f} (f'_x(A(u))f'_y(A(u)) + C\Delta(u)f''_{xy}(A(u))), \\ &2 \sum_{u \in U_f} (f'_y(A(u))^2 + C\Delta(u)f''_{yy}(A(u))). \end{aligned}$$

При $C = 1$ получаем

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a_0^2}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial a_0 \partial a_1}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial a_1^2}$$

соответственно. Если же взять $C = 0$, то получим

$$S_{xx}, \quad S_{xy}, \quad S_{yy}$$

из системы уравнений (3).

Таким образом, при $C = 0$ мы получаем классический метод Лукаса — Канаде (метод Ньютона — Рафсона), при $C = 1$ — обобщенный метод.

Разумеется, можно рассмотреть и промежуточные варианты при других значениях C .

3. Радиус сходимости метода

Мы рассматриваем некоторый алгоритм P , получающий на входе пару кадров (f, g) и некоторую область U_f на первом кадре. На выходе алгоритма получается вектор $v = (v_x, v_y)$, минимизирующий квадратичную погрешность (1), называемый вектором сдвига.

Обычно алгоритм представляет собой последовательность итераций: начиная с некоторого начального вектора v_0 , строится цепочка

$$v_0 \rightarrow v_1 = P(v_0) \rightarrow v_2 = P(v_1) \rightarrow \dots,$$

сходящаяся к некоторому вектору v , который и является результатом работы алгоритма. Мы будем исследовать одну итерацию: $v \rightarrow P(v)$.

Для изучения сходимости метода нам требуется пара кадров, для которой вектор сдвига заранее известен. Наиболее естественно для этого взять кадр g , совпадающий с кадром f . В этом случае вектор сдвига будет равен 0. В дальнейшем будем предполагать, что $g = f$ и, следовательно, истинный вектор сдвига для любой области U будет равен нулю.

Определение 1. Будем говорить, что метод P для кадра f и области U сходится на радиусе r , если для любого вектора v длины r длина $P(v)$ строго меньше r .

Замечание 4. На практике проверка всех векторов данного радиуса невозможна. Более того, условие $|P(v)| < r$ слишком слабое для практических целей. Поэтому при численных экспериментах будем использовать несколько другое условие: для $N = 20$ различных векторов длины r выполнено

$$|P(v)| < 0.9 \cdot r.$$

Определение 2. Будем говорить, что метод P для кадра f и области U имеет радиус сходимости r , если метод сходится для любого $r' < r$.

Замечание 5. На практике для вычисления радиуса сходимости, начиная с некоторого малого начального радиуса, например $r_0 = 0.2$, будем брать все более увеличивающиеся радиусы, например по формуле $r_{k+1} = 1.2 \cdot r_k$. Радиусом сходимости будем называть последнее число из этой цепочки, при котором метод сходится.

Определение 3. Рассмотрим теперь области U на кадре f в виде всевозможных квадратов со стороной L . Обозначим через $R_0(f, L)$ наименьший и через $R_1(f, L)$ наибольший радиусы сходимости по этим квадратам.

Замечание 6. На практике для вычисления R_0 и R_1 будем рассматривать не все квадраты, а их некоторое фиксированное количество N_0 . С точки зрения допустимых вычислительных затрат можно положить $N_0 = 100$.

Величины R_0 и R_1 имеют понятный геометрический смысл. При разработке новых алгоритмов поиска векторов сдвига можно ориентироваться именно на эти показатели.

4. Сравнение эффективности методов

4.1. Эффективность при фиксированной области U . Рассмотрим работу алгоритма на примере пары одинаковых изображений Lena. В качестве исходной области точек выберем квадрат размером 12×12 с координатами (160, 160), (272, 272). Для уменьшения шумов сгладим изображение фильтром Гаусса с размером ядра (7×7).

В качестве начального приближения будем рассматривать несколько различных векторов. В процессе выполнения алгоритма должен получиться вектор нулевой длины.

В табл. 1 и 2 представлены величины MSE сегмента для найденной на i -й итерации аппроксимации вектора сдвига.

Таблица 1

Отношение оценки MSE
для случая начального приближения $a_0 = (5, 0)$

i	$C = 0$	$C = 0.25$	$C = 0.5$	$C = 0.75$	$C = 1$
1	16.536	13.981	5.738	30.131	26.322
2	7.537	1.610	0.613	23.540	39.542
3	0.269	0.116	0.016	19.494	58.059

Таблица 2

Отношение оценки MSE
для случая начального приближения $a_0 = (5, 5)$

i	$C = 0$	$C = 0.25$	$C = 0.5$	$C = 0.75$	$C = 1$
1	25.387	23.502	19.123	2.902	85.171
2	17.885	11.202	3.095	0.180	84.893
3	6.885	0.216	0.253	0.001	85.653

Оценка среднеквадратичного отклонения вычисляется по формуле

$$MSE = \sqrt{\frac{1}{K} \sum_{u \in U_f} \Delta(u)^2}.$$

Эмпирические данные показывают, что при $C = 1$ алгоритм имеет худшую сходимость, чем в случае применения классического подхода.

4.2. Численное определение параметра R_0 . Для измерений был взят набор из нескольких высококачественных изображений. Для каждого изображения были рассмотрены 100 различных областей в виде квадратов со сторонами 8, 13, 18, 24, 31 и для каждой области найдены радиусы сходимости при использовании классического метода Лукаса — Канаде. Параметр R_0 , т. е. наименьший радиус сходимости, показан в табл. 3.

Таблица 3

Параметр R_0 по методу Лукаса — Канаде

File	$L = 8$	$L = 13$	$L = 18$	$L = 24$	$L = 31$
1	2.1	2.6	2.9	3.0	3.3
2	1.2	1.8	2.0	2.3	2.9
3	1.4	2.0	2.4	2.4	3.0

В целом можно сделать вывод, что для эффективного применения классического алгоритма Лукаса — Канаде требуется иметь начальное приближение к вектору сдвига с погрешностью, не превышающей 2–3.

Библиографический список

1. Хашин С. И. Оценка качества сегментации изображения // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2010. Вып. 2. С. 112–118.
2. Хашин С. И. Аффинная версия алгоритма Лукаса — Канаде // Доклады Всероссийской конференции ММО-13. М. : МАКС Пресс, 2011. С. 459–462.
3. Хашин С. И. Динамическая сегментация последовательности кадров // Машинное обучение и анализ данных. 2013. Т. 1, № 6. С. 787–795.
4. Baker S., Gross R., Matthews I. Lucas — Kanade 20 years on: a unifying framework // Int. J. Computer Vision. 2002. Vol. 56. P. 111–122.
5. Draft ITU-T recommendation and final draft international standard of joint video specification // Document JVT-G050. 2003. March.
6. ITU-T and ISO/IEC JTC 1. Generic coding of moving pictures and associated audio information. Part 2 : Video // MPEG-2. 1994. November.
7. ITU-T recommendation H.264. Advanced video coding // Document JVT-E022. 2002. September.
8. ITU-T video coding for low bit rate communication // H.263. Version 1. 1995. November ; Version 2. 1998. January ; Version 3. 2000. November.
9. Lucas B. D., Kanade T. An iterative image registration technique with an application to stereo vision // Proc. of Imaging Understanding Workshop. 1981. P. 121–130.
10. Vedapant N., Sinha U. Comparison of optimization methods in optical flow estimation // arXiv:1605.00572. URL: <https://arxiv.org/abs/1605.00572> (дата обращения: 10.02.2017).

УДК 519.65+514.11

Ю. А. Кремешкова, С. В. Пухов, Е. А. Туманова

О ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ В-СПЛАЙНОВ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

Известно, что для любого В-сплайна S степени 2 существуют треугольная пирамида τ и семейство γ всех плоскостей, параллельных некоторой заданной плоскости π , такие, что зависимость площади сечения пирамиды τ плоскостью семейства γ от параметра, определяющего положение плоскости в пространстве, совпадает с S . В настоящей статье для произвольной треугольной пирамиды τ и семейства параллельных плоскостей γ полностью описаны все случаи их взаимного расположения, при которых верно обратное: указанная выше зависимость пропорциональна В-сплайну степени 2.

Ключевые слова: В-сплайн, элементарная геометрия.

It is known that, for any B-spline S of degree 2, there exist a triangle pyramid τ and a family γ of all planes parallel to a given plane π such that the dependence of the square of the cross section of τ by a plane of γ on the parameter defining the position of the plane in the space coincides with S . In the present paper, for an arbitrary triangle pyramid τ and a family γ of parallel planes, all the cases of their mutual arrangement are fully described when the converse is true: the above dependence is proportional to a B-spline of degree 2.

Key words: B-spline, elementary geometry.

1. Введение

Принято считать, что теория сплайнов берет свое начало с работ И. Я. Шёнберга [9, 10], в которых было введено понятие сплайна как функции одной переменной, «склеенной» из кубических многочленов. На основе этого приема предложены различные варианты аппроксимаций: полиномиальные сплайны высоких степеней, тригонометрические сплайны, L-сплайны [1, с. 7]. Рассматривались также сплайны с разнородными условиями интерполяции (гетерогенные сплайны) и различными типами краевых условий [6].

С. Н. Бернштейном было установлено (1916 г.), что последовательность интерполяционных многочленов Лагранжа, построенных для непрерывной функции $f(x) = |x|$ на отрезке $[-1; 1]$ по равноотстоящим узлам ($x_0 = -1; x_n = 1$), с возрастанием n не стремится к $f(x)$. Еще более любопытен другой пример (1901 г.), восходящий к К. Рунге и состоящий в том, что указанный интерполяционный процесс не сходится на $[-1; 1]$ даже для сколь угодно раз дифференцируемой функции $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ (ее называют функцией Рунге).

Иногда эти трудности удается преодолеть путем специального выбора узлов интерполяции или за счет перехода к каким-либо обобщенным многочленам. Однако такой путь, как правило, весьма усложняет вычисления и к тому же не избавляет от второй проблемы — быстрого накопления ошибок округления с ростом степени многочлена. Поэтому на практике для того, чтобы достаточно хорошо приблизить функцию, построение интерполяционного многочлена высокой степени заменяют интерполяцией сплайнами [3].

Вместе с тем следует отметить, что область применения сплайнов не ограничивается интерполяцией. Они активно используются также в численных методах, в системах автоматического проектирования и автоматизации научных исследований, во многих других областях человеческой деятельности и, конечно, в различных системах компьютерного моделирования.

Изучение сплайнов, начавшееся в 1946 г., продолжает развиваться и в наше время. Это подтверждают публикации современных авторов. Приведем обзор лишь некоторых из них.

П. В. Мокшин и А. И. Роженок [5] исследовали задачу выбора оптимального параметра сглаживания абстрактного сглаживающего сплайна, при котором норма отклонения в узлах сетки (норма невязки) должна совпадать с заданным уровнем погрешности в данных. Алгоритм, который они предложили, позволяет достичь оптимального значения параметра сглаживания за меньшее число итераций (в практических расчетах за две итерации) за счет решения на каждом шаге нескольких задач сглаживания.

О. П. Фёдорова и О. В. Кулиш [7] изучали способы задания дополнительных условий, необходимых при вычислении коэффициентов сплайна, аппроксимирующего функцию одной переменной, так что интеграл сплайна по области задания совпадает с соответствующим интегралом функции.

П. Г. Доля [2], решив задачу сплайн-интерполяции традиционным способом и используя полученные в работе формулы, показал, как мож-

но построить единое формульное представление сплайна. При этом полностью используется уравнение только одного звена сплайна, а также коэффициенты при старших степенях остальных составляющих его звеньев. Полученные в работе формулы могут найти свое применение во многих областях прикладной математики и геометрического моделирования.

С. М. Лыткин [4] предложил метод приближения функций линейными комбинациями сдвигов фиксированной функции — В-сплайна первой, второй или третьей степени. Этот метод является точным на классах сплайнов соответствующей степени с дефектом 1. Получены оценки сильного типа для норм аппроксимирующих операторов в некоторых пространствах, из которых непосредственно следует, что приближение в этих пространствах совпадает по порядку с наилучшим приближением сплайнами.

В настоящей работе рассматриваются вопросы геометрической интерпретации В-сплайнов, т. е. сплайнов дефекта 1 с конечным носителем минимальной длины (здесь и далее используется терминология, принятая в монографии [3]). Х. Б. Карри и И. Я. Шёнбергом [8] доказано, что для любого В-сплайна степени $n - 1$ существуют n -мерный симплекс и семейство параллельных $(n - 1)$ -мерных плоскостей такие, что зависимость площади сечения данного симплекса $(n - 1)$ -мерной плоскостью из этого семейства от параметра, определяющего положение $(n - 1)$ -мерной плоскости в пространстве, совпадает с указанным сплайном. Возникает вопрос: верно ли обратное? Оказывается, что не всегда. В данной работе при $n = 3$ перечисляются все случаи взаимного расположения треугольной пирамиды и плоскостей семейства, при которых описанная выше зависимость представляет собой функцию, пропорциональную В-сплайну.

Уточним, что функция $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ пропорциональна В-сплайну степени 2, если она тождественно равна нулю вне некоторого отрезка $[a; d]$, ее ограничение на этот отрезок принадлежит классу $C^1[a; d]$ и существуют числа $b, c \in \mathbb{R}$ такие, что $a \leq b \leq c \leq d$ и на каждом из отрезков $[a; b]$, $[b; c]$, $[c; d]$ функция $g(x)$ совпадает с некоторым многочленом степени не выше 2. Отображение $g(x)$ является В-сплайном, если, кроме того, $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = 1$.

Зафиксируем произвольную треугольную пирамиду τ (далее для краткости — просто пирамида) и семейство γ всех плоскостей, параллельных некоторой заданной плоскости π . Возьмем произвольную прямую l , пересекающую все плоскости семейства γ , и параметризуем ее следующим образом: в некоторой точке этой прямой отметим начало отсчета O , затем выберем одно из двух направлений как положительное и построим отрезок OE , один из концов которого находится в начале отсчета, а другой — в некоторой точке полупрямой положительного направления. По построению каждой плоскости семейства γ однозначно соответствует точка X ее пересечения с прямой l и число t , определяемое из соотношения $\overrightarrow{OX} = t \cdot \overrightarrow{OE}$. Сопоставляя каждому значению параметра t площадь сечения пирамиды τ плоскостью, соответствующей указанному значению t , получим функцию $f_{\gamma, \tau}(t)$. Имеет место следующая

Теорема. *Функция $f_{\gamma, \tau}(t)$ пропорциональна В-сплайну степени 2 тогда и только тогда, когда не существует плоскости семейства γ та-*

кой, что две вершины пирамиды τ принадлежат данной плоскости, а две другие лежат по разные стороны от нее.

Случай взаимного расположения пирамиды и семейства плоскостей, при котором функция $f_{\gamma,\tau}(t)$ не пропорциональна никакому В-сплайну, изображен на рис. 1. Отметим также, что функция $f_{\gamma,\tau}(t)$ не просто пропорциональна, а совпадает с В-сплайном тогда и только тогда, когда пирамида τ имеет единичный объем.

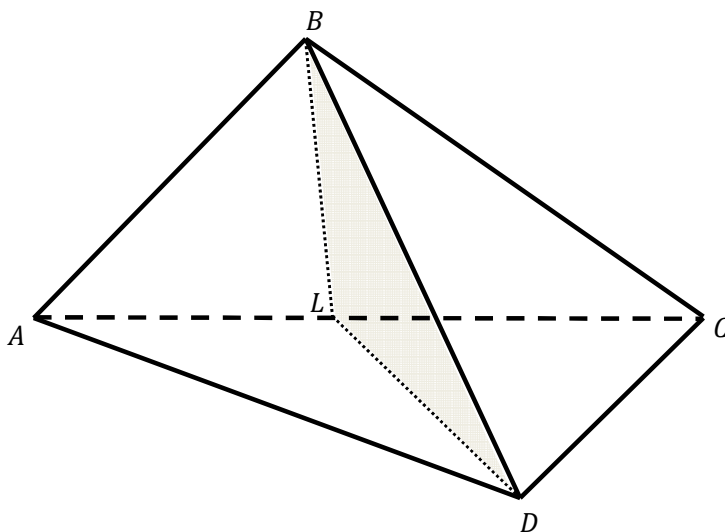


Рис. 1

2. Доказательство теоремы

Нетрудно показать, что если l' — какая-то другая прямая, пересекающая все плоскости семейства γ , и t' — определяемый ею параметр, то существуют такие числа $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, что для любой плоскости семейства γ соответствующие этой плоскости значения параметров t и t' связаны соотношением $t' = \alpha t + \beta$. Поэтому пропорциональность функции $f_{\gamma,\tau}(t)$ В-сплайну не зависит от выбора прямой l и ее параметризации.

Легко видеть, что прямую l всегда можно провести таким образом, чтобы она содержала одно из ребер пирамиды, это ребро служило единичным отрезком и все плоскости семейства, пересекающие пирамиду, проходили через точки данного отрезка. Во всех приводимых далее рассуждениях обозначения для вершин пирамиды выбраны так, что прямая l содержит ребро AC , начало отсчета совпадает с точкой A , единичный вектор — с вектором \overrightarrow{AC} , а каждая плоскость семейства, пересекающая пирамиду, проходит через некоторую точку X ребра AC . В результате значение параметра t , соответствующее этой плоскости, удовлетворяет соотношению $t = \frac{AX}{AC} \in [0; 1]$, и $f_{\gamma,\tau}(t) = 0$ при $t \notin [0; 1]$.

Среди плоскостей семейства γ определим две предельные плоскости, которые пересекают пирамиду τ , но для каждой из них имеются сколько угодно близкие плоскости семейства, которые уже не пересекают эту пирамиду. Таким образом, все плоскости семейства γ , лежащие между предельными, пересекают пирамиду τ по внутренности. Отметим также, что этими внутренними сечениями являются треугольники или четырехуголь-

ники, так как у пирамиды τ четыре грани и при пересечении плоскости с гранью получается или отрезок, или точка, или вообще пустое множество.

Рассмотрим случаи взаимного расположения пирамиды и семейства параллельных плоскостей. Классифицируем их с помощью количества вершин пирамиды на предельных плоскостях.

Первый случай. Три вершины расположены на одной предельной плоскости и одна — на другой (рис. 2).

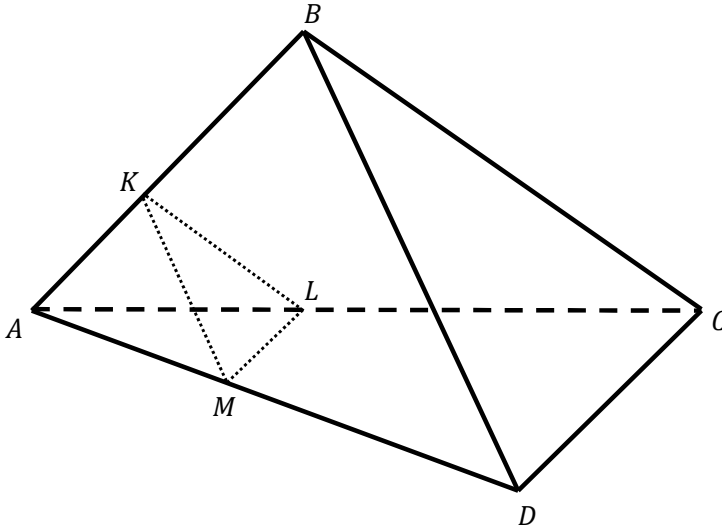


Рис. 2

Этот случай — самый простой: некоторая плоскость семейства совпадает с плоскостью одной из граней пирамиды (на рис. 2 — грань BCD) и сечения пирамиды плоскостями семейства являются треугольниками (на рис. 2 — $\triangle KLM$), подобными грани пирамиды, содержащейся в предельной плоскости семейства.

Полагая $\rho = S_{\triangle BCD}$, легко видеть, что $S_{\triangle KLM} = \rho \cdot \left(\frac{AL}{AC}\right)^2$. Так как в данном случае L играет роль точки X , то из последней формулы следует, что

$$f_{\gamma,\tau}(t) = \rho t^2 \quad (1)$$

при $t \in [0; 1]$.

Значит, функция $f_{\gamma,\tau}(t)$ пропорциональна В-сплайну степени 2.

Второй случай. На каждой предельной плоскости находится по две вершины (рис. 3).

В этом случае в пирамиде имеется пара скрещивающихся ребер, которые параллельны плоскостям семейства (на рис. 3 — ребра AB и CD). Заклучим пирамиду $ABCD$ в (окаймляющий) параллелепипед $AD_1BC_1A_1DB_1C$ следующим образом.

Представим, что скрещивающиеся ребра AB и DC являются диагоналями пары противоположных граней параллелепипеда. По предположению, определяющему второй случай, имеется пара плоскостей из семейства γ , которые содержат эти ребра. Построим отрезки A_1B_1 и D_1C_1 , параллельные отрезкам AB и DC соответственно и такие, что середина от-

резка A_1B_1 совпадает с серединой отрезка DC , а середина отрезка D_1C_1 — с серединой отрезка AB . В результате получим пару параллельных граней параллелепипеда (параллелограммы AD_1BC_1 и A_1DB_1C), лежащих в плоскостях семейства γ .

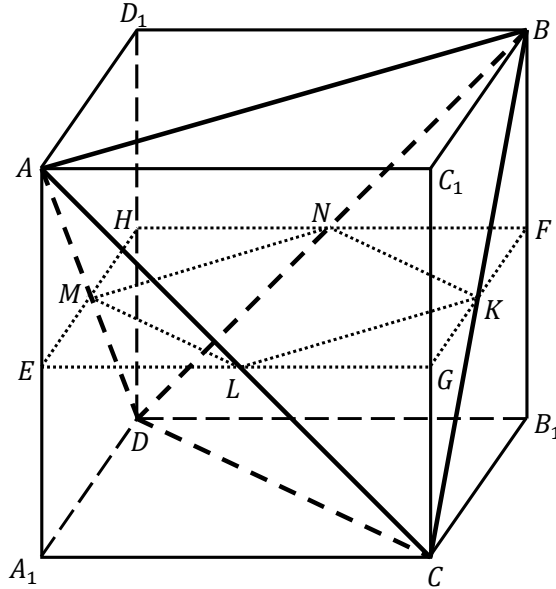


Рис. 3

Исходная пирамида дополняется до построенного параллелепипеда четырьмя другими пирамидами (A_1ADC , $BDAD_1$, DBB_1C , BC_1CA). Причем у каждой из этих пирамид имеется грань, параллельная плоскостям семейства γ , и грань, совпадающая с одной из граней исходной пирамиды.

Таким образом, сечение $MNKL$ пирамиды $ABCD$ плоскостью семейства γ дополняется до сечения $EHFGE$ окаймляющего параллелепипеда (которое всегда совпадает с точностью до параллельного переноса с гранью параллелепипеда) четырьмя треугольниками: $\triangle EML$, $\triangle MHN$, $\triangle NFK$, $\triangle KGL$ — сечениями пирамид A_1ADC , $BDAD_1$, DBB_1C , BC_1CA плоскостями, параллельными их граням A_1DC , AD_1B , DB_1C , BC_1A соответственно. Поэтому

$$S_{MNKL} = S_{EHFGE} - S_{\triangle EML} - S_{\triangle MHN} - S_{\triangle NFK} - S_{\triangle KGL}$$

и согласно формуле (1)

$$\begin{aligned} S_{\triangle EML} &= S_{\triangle A_1DC} \cdot \left(\frac{AE}{AA_1}\right)^2, & S_{\triangle MHN} &= S_{\triangle AD_1B} \cdot \left(\frac{DH}{DD_1}\right)^2, \\ S_{\triangle NFK} &= S_{\triangle DB_1C} \cdot \left(\frac{BF}{BB_1}\right)^2, & S_{\triangle KGL} &= S_{\triangle BC_1A} \cdot \left(\frac{CG}{CC_1}\right)^2. \end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$S_{\triangle A_1DC} = S_{\triangle AD_1B} = S_{\triangle DB_1C} = S_{\triangle BC_1A} = \frac{1}{2} S_{AD_1BC_1}.$$

Так как здесь $X = L$, то

$$\frac{AE}{AA_1} = \frac{BF}{BB_1} = \frac{AL}{AC} = t, \quad \frac{DH}{DD_1} = \frac{CG}{CC_1} = 1 - \frac{AL}{AC} = 1 - t.$$

Обозначив $S_{AD_1BC_1}$ через σ , получим

$$f_{\gamma,\tau}(t) = \sigma - \sigma t^2 - \sigma(1-t)^2 = 2\sigma t(1-t) \quad (2)$$

при $t \in [0; 1]$.

Таким образом, функция $f_{\gamma,\tau}(t)$, как и в первом случае, пропорциональна В-сплайну степени 2.

Третий случай. Две вершины расположены на одной предельной плоскости и одна — на другой (рис. 4).

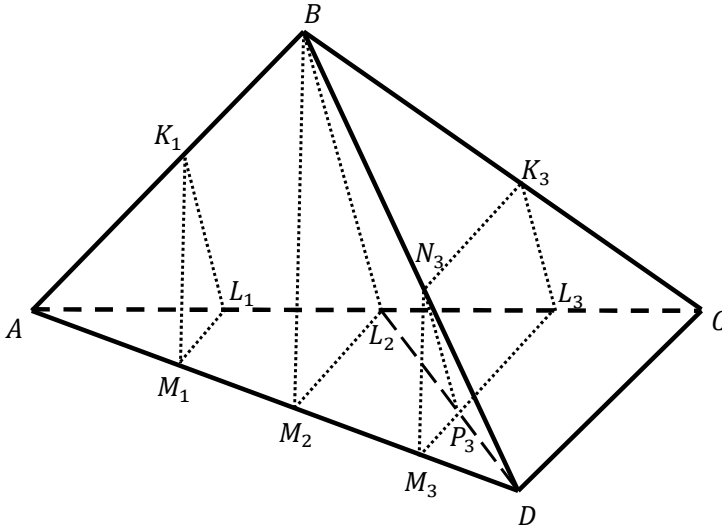


Рис. 4

Тогда некоторая промежуточная плоскость проходит через четвертую вершину пирамиды (на рис. 4 — вершина B), пересекает ее по треугольнику (на рис. 4 — $\triangle BL_2M_2$) и разбивает на два многогранника (ABL_2M_2 и $BCDM_2L_2$). Зафиксируем следующие обозначения:

$$\sigma = \frac{1}{2} \cdot BL_2 \cdot CD \cdot \sin \angle BL_2M_2, \quad t_1 = \frac{AL_2}{AC}.$$

Согласно построению $0 \leq t_1 \leq 1$. Если $t_1 = 0$ или $t_1 = 1$, то получаем разобранные выше соответственно второй и первый случаи взаимного расположения пирамиды τ и семейства γ . Поэтому далее будем считать, что $0 < t_1 < 1$.

Рассмотрим варианты расположения точки X :

а) $X \in AL_2$ (на рис. 4 роль точки X играет L_1).

Тогда рассматриваемое сечение (на рис. 4 — $\triangle K_1L_1M_1$) является одновременно и сечением пирамиды ABL_2M_2 , грань BL_2M_2 которой лежит в одной из плоскостей семейства γ . Поэтому согласно формуле (1)

$$S_{\triangle K_1L_1M_1} = S_{\triangle BL_2M_2} \cdot \left(\frac{AL_1}{AL_2} \right)^2.$$

Поскольку $X = L_1$, имеют место равенства

$$\frac{AL_1}{AL_2} = \frac{t}{t_1}, \quad S_{\Delta K_1 L_1 M_1} = S_{\Delta B L_2 M_2} \cdot \left(\frac{t}{t_1}\right)^2.$$

Вычислим площадь сечения пирамиды $ABCD$ промежуточной плоскостью:

$$S_{\Delta B L_2 M_2} = \frac{1}{2} \cdot B L_2 \cdot L_2 M_2 \cdot \sin \angle B L_2 M_2.$$

Из соотношений $\Delta A L_2 M_2 \sim \Delta A C D$ и $t_1 = \frac{A L_2}{A C}$ следует, что $L_2 M_2 = t_1 \cdot C D$. Значит, $S_{\Delta B L_2 M_2} = \sigma t_1$ и

$$S_{\Delta K_1 L_1 M_1} = \sigma t_1 \left(\frac{t}{t_1}\right)^2 = \frac{\sigma}{t_1} t^2;$$

б) $X \in L_2 C$ (на рис. 4 роль точки X играет L_3).

Проведем диагональ $L_2 D$ трапеции $M_2 L_2 C D$, затем построим плоскость через эту диагональ и вершину B пирамиды. Тогда многогранник $B C D M_2 L_2$ разбивается на две треугольные пирамиды $M_2 B L_2 D$ и $L_2 B C D$, а его сечение, трапеция $N_3 K_3 L_3 M_3$, — на треугольник $\Delta N_3 P_3 M_3$ и параллелограмм $N_3 K_3 L_3 P_3$.

Рассматривая $\Delta N_3 P_3 M_3$ как сечение пирамиды $M_2 B L_2 D$ плоскостью, параллельной ее грани $B L_2 M_2$, согласно формуле (1) получим

$$S_{\Delta N_3 P_3 M_3} = S_{\Delta B L_2 M_2} \cdot \left(\frac{D M_3}{D M_2}\right)^2.$$

Из справедливости соотношений $\frac{D M_3}{D M_2} = \frac{C L_3}{C L_2}$, $C L_3 = A C - A L_3$ и $C L_2 = A C - A L_2$ вытекает, что

$$\frac{D M_3}{D M_2} = \frac{A C - A L_3}{A C} \cdot \left(\frac{A C - A L_2}{A C}\right)^{-1} = \frac{1 - t}{1 - t_1}$$

(здесь уже $X = L_3$, поэтому $\frac{A L_3}{A C} = t$).

Отсюда, используя найденное ранее значение $S_{\Delta B L_2 M_2}$, получим, что

$$S_{\Delta N_3 P_3 M_3} = \sigma t_1 \left(\frac{1 - t}{1 - t_1}\right)^2.$$

Параллелограмм $N_3 K_3 L_3 P_3$ служит сечением пирамиды $L_2 B C D$, в которой $B L_2$ и $C D$ являются скрещивающимися ребрами, параллельными плоскостям семейства. Чтобы найти его площадь, как во втором случае, заключим пирамиду $L_2 B C D$ в окаймляющий параллелепипед. Легко видеть, что площадь грани этого параллелепипеда, содержащей ребро $B L_2$, равна σ . Поэтому, пользуясь формулой (2), получаем

$$S_{N_3 K_3 L_3 P_3} = 2\sigma \cdot \frac{L_2 L_3}{L_2 C} \cdot \left(1 - \frac{L_2 L_3}{L_2 C}\right).$$

Применяя соотношения $L_2 L_3 = A L_3 - A L_2$ и $L_2 C = A C - A L_2$, имеем

$$\frac{L_2 L_3}{L_2 C} = \frac{A L_3 - A L_2}{A C} \cdot \left(\frac{A C - A L_2}{A C}\right)^{-1} = \frac{t - t_1}{1 - t_1}.$$

Следовательно,

$$S_{N_3 K_3 L_3 P_3} = 2\sigma \frac{t - t_1}{1 - t_1} \left(1 - \frac{t - t_1}{1 - t_1}\right) = 2\sigma \frac{(t - t_1)(1 - t)}{(1 - t_1)^2},$$

$$S_{N_3K_3L_3M_3} = 2\sigma \frac{(t-t_1)(1-t)}{(1-t_1)^2} + \sigma t_1 \left(\frac{1-t}{1-t_1} \right)^2 = \sigma \frac{1-t}{(1-t_1)^2} (2t - t_1 - t_1t).$$

Таким образом, зависимость площади сечения пирамиды τ от значения параметра, определяющего положение плоскости из семейства, в рассматриваемом случае имеет вид

$$f_{\gamma,\tau}(t) = \begin{cases} \frac{\sigma}{t_1} t^2, & t \in [0; t_1], \\ \sigma \frac{1-t}{(1-t_1)^2} (2t - t_1 - t_1t), & t \in (t_1; 1], \\ 0, & t \notin [0; 1]. \end{cases}$$

Покажем, что производная функции $f_{\gamma,\tau}(t)$ непрерывна в точке t_1 . В самом деле,

$$f_{\gamma,\tau}(t)' \Big|_{t=t_1-0} = \frac{2\sigma}{t_1} t \Big|_{t=t_1} = 2\sigma,$$

$$f_{\gamma,\tau}(t)' \Big|_{t=t_1+0} = \frac{\sigma}{(1-t_1)^2} (2 - 4t + 2t_1t) \Big|_{t=t_1} = 2\sigma.$$

Следовательно, дефект сплайна $f_{\gamma,\tau}(t)$ равен 1, и потому искомая зависимость пропорциональна В-сплайну степени 2.

Четвертый случай. На каждой из предельных плоскостей находится по одной вершине пирамиды (рис. 5).

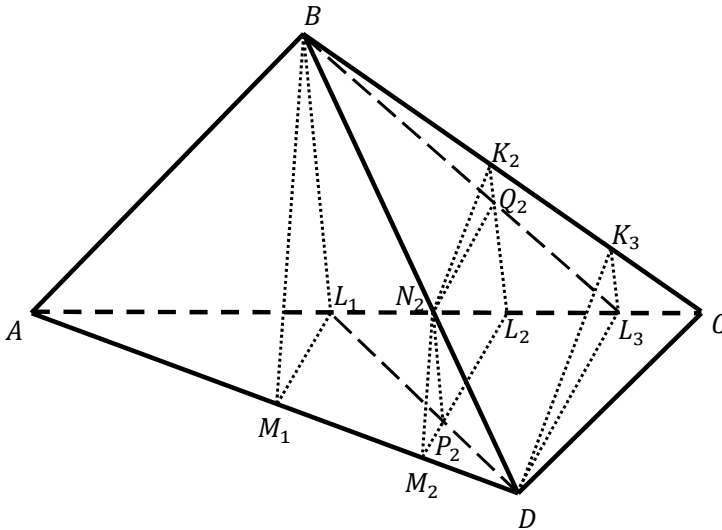


Рис. 5

Тогда существуют две промежуточные плоскости, содержащие оставшиеся две вершины пирамиды (на рис. 5 — вершины B и D). Эти плоскости пересекают пирамиду $ABCD$ по треугольникам $(\triangle BL_1M_1)$ и $(\triangle K_3L_3D)$ и разбивают ее на три многогранника: треугольные пирамиды ABL_1M_1 , $C DL_3K_3$ и многогранник $L_1M_1BK_3L_3D$. Зафиксируем следующие обозначения:

$$\sigma = \frac{1}{2} \cdot BL_1 \cdot L_3D \cdot \sin \angle BL_1M_1,$$

$$t_1 = \frac{AL_1}{AC}, \quad t_2 = \frac{AL_3}{AC}.$$

Согласно построению справедливы неравенства: $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$. Если $t_1 = 0$ или $t_2 = 1$, то получаем третий случай взаимного расположения пирамиды $ABCD$ и семейства γ , который описан выше. Поэтому будем считать, что $0 < t_1 \leq t_2 < 1$.

Рассмотрим варианты расположения точки X :

а) $X \in AL_1$.

Тогда искомую площадь сечения найдем как площадь сечения пирамиды ABL_1M_1 плоскостью, параллельной ее грани BL_1M_1 . По формуле (1)

$$S_{\text{сеч}} = S_{\Delta BL_1M_1} \cdot \left(\frac{AX}{AL_1} \right)^2,$$

и так как $\frac{AX}{AL_1} = \frac{t}{t_1}$, то

$$S_{\text{сеч}} = S_{\Delta BL_1M_1} \cdot \left(\frac{t}{t_1} \right)^2.$$

Вычислим площадь треугольника ΔBL_1M_1 :

$$S_{\Delta BL_1M_1} = \frac{1}{2} \cdot BL_1 \cdot L_1M_1 \cdot \sin \angle BL_1M_1.$$

Из подобия треугольников ΔAL_1M_1 и ΔAL_3D вытекает, что $\frac{L_1M_1}{L_3D} = \frac{AL_1}{AL_3}$. Отсюда и из соотношения $\frac{AL_1}{AL_3} = \frac{t_1}{t_2}$ получим, что $L_1M_1 = L_3D \cdot \frac{t_1}{t_2}$ и, следовательно, $S_{\Delta BL_1M_1} = \sigma \frac{t_1}{t_2}$.

Значит, $f_{\gamma, \tau}(t) = \sigma \frac{t^2}{t_1 t_2}$ при $t \in [0; t_1]$.

Вычислим производную этой функции в точке t_1 слева:

$$f_{\gamma, \tau}(t)' \Big|_{t=t_1-0} = \frac{2\sigma}{t_2}; \tag{3}$$

б) $X \in L_3C$.

Тогда, как и выше, искомую площадь сечения можно найти, рассматривая последнее как сечение пирамиды CDL_3K_3 плоскостью, параллельной ее грани K_3L_3D :

$$S_{\text{сеч}} = S_{\Delta K_3L_3D} \cdot \left(\frac{CX}{CL_3} \right)^2.$$

Используя соотношения $CX = AC - AX$ и $CL_3 = AC - AL_3$, получим

$$\frac{CX}{CL_3} = \frac{AC - AX}{AC} \cdot \left(\frac{AC - AL_3}{AC} \right)^{-1} = \frac{1 - t}{1 - t_2}.$$

Вычислим площадь треугольника ΔK_3L_3D :

$$S_{\Delta K_3L_3D} = \frac{1}{2} \cdot K_3L_3 \cdot L_3D \cdot \sin \angle K_3L_3D.$$

Используя соотношения $K_3L_3 = BL_1 \cdot \frac{CL_3}{CL_1}$, $CL_3 = AC - AL_3$ и $CL_1 = AC - AL_1$, получим

$$K_3L_3 = BL_1 \cdot \frac{AC - AL_3}{AC} \cdot \left(\frac{AC - AL_1}{AC} \right)^{-1} = BL_1 \cdot \frac{1 - t_2}{1 - t_1}.$$

Отсюда и из равенства углов $\angle BL_1M_1$ и $\angle K_3L_3D$ вытекает, что

$$S_{\Delta K_3L_3D} = \frac{1}{2} \cdot BL_1 \cdot \frac{1 - t_2}{1 - t_1} \cdot L_3D \cdot \sin \angle BL_1M_1 = \sigma \frac{1 - t_2}{1 - t_1}.$$

Значит,

$$f_{\gamma, \tau}(t) = \sigma \frac{(1 - t)^2}{(1 - t_1)(1 - t_2)}$$

при $t \in [t_2; 1]$.

Найдем производную этой функции в точке t_2 справа:

$$f_{\gamma, \tau}(t)' \Big|_{t=t_2+0} = \frac{2\sigma}{t_1 - 1}. \quad (4)$$

Если $L_1 = L_3$, то вершины B и D принадлежат одной плоскости семейства γ , треугольники ΔBL_1M_1 и ΔK_3L_3D совпадают и пирамида $ABCD$ является объединением пирамид ABL_1M_1 и CDL_3K_3 . При таком расположении пирамиды и семейства γ справедливо равенство $t_1 = t_2$, а потому искомый сплайн имеет вид

$$f_{\gamma, \tau}(t) = \begin{cases} \sigma \frac{t^2}{t_1^2}, & t \in [0; t_1], \\ \sigma \frac{(1 - t)^2}{(1 - t_1)^2}, & t \in (t_1; 1], \\ 0, & t \notin [0; 1]. \end{cases}$$

Для непрерывности производной функции $f_{\gamma, \tau}(t)$ в точке t_1 в силу (3) и (4) необходимо и достаточно выполнения равенства $\frac{2\sigma}{t_2} = \frac{2\sigma}{t_1 - 1}$, но при $t_1 = t_2$ это невозможно. Значит, если вершины B и D пирамиды $ABCD$ принадлежат одной плоскости семейства γ , то сплайн $f_{\gamma, \tau}(t)$ имеет дефект 2 и потому не является В-сплайном.

Далее будем считать, что $L_1 \neq L_3$ и, следовательно, $t_1 < t_2$;

в) $X \in L_1L_3$ (на рис. 5 роль точки X играет L_2).

Разобьем многогранник $L_1M_1BK_3L_3D$ на три треугольные пирамиды. Для этого проведем в гранях, которые являются трапециями, по одной диагонали так, чтобы они не имели общих точек (на рис. 5 — L_1D и BL_3). Тогда площадь сечения многогранника $L_1M_1BK_3L_3D$ (четырехугольника $K_2L_2M_2N_2$) будет представлять собой сумму площадей S_1 , S_2 , S_3 сечений пирамид DBL_1M_1 , L_1BL_3D , BK_3L_3D соответственно.

Вычислим площадь сечения треугольной пирамиды DBL_1M_1 — треугольника $\Delta N_2P_2M_2$. Согласно (1)

$$S_1 = S_{\Delta BL_1M_1} \cdot \left(\frac{DM_2}{DM_1} \right)^2.$$

Из справедливости соотношений $\frac{DM_2}{DM_1} = \frac{L_3L_2}{L_3L_1}$, $L_3L_2 = AL_3 - AL_2$ и $L_3L_1 = AL_3 - AL_1$ вытекает, что

$$\frac{DM_2}{DM_1} = \frac{AL_3 - AL_2}{AC} \cdot \left(\frac{AL_3 - AL_1}{AC} \right)^{-1} = \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1}$$

(напомним, что здесь $X = L_2$, и потому $\frac{AL_2}{AC} = t$).

Ранее было установлено, что $S_{\Delta BL_1M_1} = \sigma \frac{t_1}{t_2}$, значит,

$$S_1 = \sigma \frac{t_1}{t_2} \left(\frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} \right)^2.$$

Аналогичным образом вычислим площадь сечения треугольной пирамиды BK_3L_3D — треугольника $\Delta K_2Q_2N_2$:

$$S_3 = S_{\Delta K_3L_3D} \cdot \left(\frac{BK_2}{BK_3} \right)^2.$$

Используя соотношения $\frac{BK_2}{BK_3} = \frac{L_1L_2}{L_1L_3}$, $L_1L_2 = AL_2 - AL_1$ и $L_1L_3 = AL_3 - AL_1$, заключаем, что

$$\frac{BK_2}{BK_3} = \frac{AL_2 - AL_1}{AC} \cdot \left(\frac{AL_3 - AL_1}{AC} \right)^{-1} = \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}.$$

Отсюда, учитывая найденное выше значение площади треугольника ΔK_3L_3D , получим

$$S_3 = \sigma \frac{1 - t_2}{1 - t_1} \left(\frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \right)^2.$$

Вычислим площадь сечения треугольной пирамиды L_1BL_3D — четырехугольника $Q_2L_2P_2N_2$. Скрещивающиеся ребра BL_1 и L_3D этой пирамиды лежат в промежуточных плоскостях, принадлежащих семейству γ . Поэтому в силу (2)

$$S_2 = 2\sigma \cdot \frac{L_1L_2}{L_1L_3} \cdot \left(1 - \frac{L_1L_2}{L_1L_3} \right),$$

так как $\frac{1}{2} \cdot BL_1 \cdot L_3D \cdot \sin \angle BL_1M_1 = \sigma$ — площадь основания параллелепипеда, окаймляющего пирамиду L_1BL_3D .

Воспользовавшись соотношением $\frac{L_1L_2}{L_1L_3} = \frac{t-t_1}{t_2-t_1}$, получим

$$S_2 = 2\sigma \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \left(1 - \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \right) = 2\sigma \frac{(t - t_1)(t_2 - t)}{(t_2 - t_1)^2}.$$

Теперь вычислим значение функции $f_{\gamma,\tau}(t)$ при $t_1 \leq t \leq t_2$:

$$\begin{aligned} f_{\gamma,\tau}(t) &= \sigma \frac{t_1}{t_2} \left(\frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} \right)^2 + \sigma \frac{1 - t_2}{1 - t_1} \left(\frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \right)^2 + 2\sigma \frac{(t - t_1)(t_2 - t)}{(t_2 - t_1)^2} = \\ &= \frac{\sigma}{(t_2 - t_1)^2} \left(\frac{t_1(t - t_2)^2}{t_2} + \frac{(1 - t_2)(t - t_1)^2}{1 - t_1} + 2(t - t_1)(t_2 - t) \right). \end{aligned}$$

Найдем производную этой функции:

$$f_{\gamma,\tau}(t)' = \frac{\sigma}{(t_2 - t_1)^2} \left(\frac{2t_1(t - t_2)}{t_2} + \frac{2(1 - t_2)(t - t_1)}{1 - t_1} + 2t_2 - 4t + 2t_1 \right).$$

Значит, в случае, когда $t_1 < t_2$, искомая зависимость представляет собой сплайн с двумя узлами, t_1 и t_2 , и имеет вид:

$$f_{\gamma,\tau}(t) = \begin{cases} \frac{\sigma t^2}{t_1 t_2}, & t \in [0; t_1], \\ \frac{\sigma}{(t_2 - t_1)^2} \left(\frac{t_1(t-t_2)^2}{t_2} + \frac{(1-t_2)(t-t_1)^2}{1-t_1} + 2(t-t_1)(t_2-t) \right), & t \in (t_1; t_2], \\ \frac{\sigma(1-t)^2}{(1-t_1)(1-t_2)}, & t \in (t_2; 1], \\ 0, & t \notin [0; 1]. \end{cases}$$

Чтобы вычислить его дефект, исследуем производную полученной функции на непрерывность в узлах t_1 и t_2 . Согласно (3) и (4)

$$\begin{aligned} f_{\gamma,\tau}(t)'|_{t=t_1+0} &= \frac{\sigma}{(t_2 - t_1)^2} \left(-\frac{2t_1(t_2 - t_1)}{t_2} + 2t_2 - 2t_1 \right) = \\ &= \frac{2\sigma}{t_2} = f_{\gamma,\tau}(t)'|_{t=t_1-0}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{\gamma,\tau}(t)'|_{t=t_2-0} &= \frac{\sigma}{(t_2 - t_1)^2} \left(\frac{2(1-t_2)(t_2 - t_1)}{1-t_1} - 2t_2 + 2t_1 \right) = \\ &= \frac{2\sigma}{t_1 - 1} = f_{\gamma,\tau}(t)'|_{t=t_2+0}. \end{aligned}$$

Следовательно, дефект сплайна $f_{\gamma,\tau}(t)$ равен 1.

Таким образом, если вершины B и D исходной пирамиды не лежат в одной плоскости семейства, то искомая зависимость $f_{\gamma,\tau}(t)$ пропорциональна В-сплайну степени 2. Теорема доказана.

Библиографический список

1. Варга Р. Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе. М. : Мир, 1974. 124 с.
2. Доля П. Г. Об одном способе представления полиномиальных сплайнов в системах символьной математики // Вестник Харьковского национального университета. Сер.: Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления. 2007. Вып. 7. С. 130–139.
3. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М. : Наука, 1980. 352 с.
4. Лыткин С. М. Разложение по системе сдвигов В-сплайна // Математические заметки. 2009. Т. 86, вып. 6. С. 859–869.
5. Мокшин П. В., Рожненко А. И. О поиске оптимального параметра сглаживающего сплайна // Сибирский журнал индустриальной математики. 2015. Т. 18, № 2. С. 63–73.
6. Рожненко А. И. Теория и алгоритмы вариационной сплайн-аппроксимации : дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Новосибирск, 2003. 231 с.
7. Фёдорова О. П., Кулиш О. В. О задании дополнительных условий в методе построения сплайна, сохраняющего интеграл функции по области ее задания // Вестник Томского государственного университета. Сер.: Математика и механика. 2010. № 1. С. 47–52.
8. Curry H. B., Schoenberg I. J. On Polya frequency functions. IV. The fundamental spline functions and their limits // J. Anal. Math. 1966. Vol. 17. P. 71–107.
9. Schoenberg I. J. Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. Part A : On the problem of smoothing or graduation. A first class of analytic approximation formulae // Quart. Appl. Math. 1946. Vol. 4, № 1. P. 45–99.
10. Schoenberg I. J. Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. Part B : On the problem of osculatory interpolation. A second class of analytic approximation formulae // Quart. Appl. Math. 1946. Vol. 4, № 2. P. 112–141.

УДК 512.543

Д. И. Молдаванский

ОБ ОТДЕЛИМОСТИ ЦИКЛИЧЕСКИХ ПОДГРУПП В ПРЯМОМ ПРОИЗВЕДЕНИИ ГРУПП

Получено достаточное условие делимости в классе конечных π -групп всех π' -изолированных циклических подгрупп прямого произведения двух групп. Построен пример, показывающий, что это условие не является необходимым.

Ключевые слова: аппроксимируемость группы в некотором классе групп, делимость подгрупп в некотором классе групп, прямое произведение групп.

The sufficient condition for any π' -isolated cyclic subgroup of a direct product of two groups to be separable in the class of all finite π -groups is obtained. An example showing that this condition is not necessary is constructed.

Key words: residuality of group in some class of groups, separability of subgroups in some class of groups, direct product of groups.

1. Введение. Формулировка результатов

Напомним, что если \mathcal{K} — некоторый класс групп, то группа G называется аппроксимируемой в классе \mathcal{K} (или, короче, \mathcal{K} -аппроксимируемой), если для любого неединичного элемента $g \in G$ найдется гомоморфизм группы G на некоторую группу из класса \mathcal{K} , при котором образ $g\varphi$ элемента g отличен от единицы (или, что равносильно, элемент g не входит в некоторую нормальную подгруппу N группы G , фактор-группа G/N по которой принадлежит классу \mathcal{K}).

Подгруппа H группы G называется делимой в классе \mathcal{K} (или, короче, \mathcal{K} -делимой), если для любого элемента $g \in G$, не принадлежащего подгруппе H , найдется гомоморфизм группы G на некоторую группу из класса \mathcal{K} , при котором образ $g\varphi$ элемента g не принадлежит образу $H\varphi$ подгруппы H (или, что равносильно, элемент g не входит в подгруппу HN для некоторой нормальной подгруппы N группы G такой, что фактор-группа G/N принадлежит классу \mathcal{K}).

Очевидно, что произвольная группа является \mathcal{K} -аппроксимируемой тогда и только тогда, когда ее единичная подгруппа \mathcal{K} -делима. Для гомоморфно замкнутых классов (т. е. классов, содержащих вместе с каждой группой все ее гомоморфные образы) имеет место более общее утверждение: нормальная подгруппа H некоторой группы G является \mathcal{K} -делимой тогда и только тогда, когда фактор-группа G/H \mathcal{K} -аппроксимируема.

Если \mathcal{F} — класс всех конечных групп, то понятия \mathcal{F} -аппроксимируемости групп и \mathcal{F} -делимости подгрупп совпадают с хорошо известными и наиболее изученными понятиями финитной аппроксимируемости и финитной делимости соответственно. Значительное число публикаций посвящено также изучению свойств \mathcal{F}_π -аппроксимируемости групп и \mathcal{F}_π -делимости подгрупп. Здесь π — некоторое множество простых чисел и \mathcal{F}_π — класс всех конечных π -групп, т. е. конечных групп, порядок которых является π -числом (целое число называется π -числом, если все простые делители его принадлежат множеству π).

© Молдаванский Д. И., 2017

Опубликованные результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России № 1.8695.2017/8.9

Очевидно, что если множество π пусто, то класс \mathcal{F}_π содержит только единичную группу, а если π совпадает с множеством всех простых чисел, то \mathcal{F}_π совпадает с классом \mathcal{F} . Если множество π состоит из единственного простого числа p , вместо \mathcal{F}_π пишут \mathcal{F}_p , а π -числа называют p -числами.

Исследования, связанные с понятием отделимости подгрупп, направлены, в основном, на решения вопросов о том, какие подгруппы данной группы являются \mathcal{K} -отделимыми и сохраняются ли свойства \mathcal{K} -отделимости подгрупп некоторого типа (всех, всех конечно порожденных, всех циклических и т. п.) при теоретико-групповых конструкциях.

Так, из замечания, сделанного выше, следует, что ядро гомоморфизма произвольной нециклической свободной группы F на 2-порожденную группу, не являющуюся финитно аппроксимируемой (относительно существования таких групп см., напр., [7]), не является финитно отделимой подгруппой группы F . В силу теоремы 2.10 из монографии [3] такая неотделимая подгруппа группы F не является конечно порожденной. С другой стороны, из теоремы М. Холла [6] следует, что произвольная конечно порожденная подгруппа любой свободной группы финитно отделима. Обобщением этого утверждения выступает результат Н. С. Романовского [4], состоящий в том, что (обычное) свободное произведение произвольного семейства групп, все конечно порожденные подгруппы каждой из которых финитно отделимы, также является группой, все конечно порожденные подгруппы которой финитно отделимы. Отметим, что, поскольку группа, раскладывающаяся в свободное произведение хотя бы двух неединичных групп и не имеющая нециклических свободных подгрупп, есть свободное произведение двух групп порядка 2, наследование свободным произведением групп от свободных сомножителей финитной отделимости всех подгрупп имеет место только в этом исключительном случае. Отметим также, что для обобщенного свободного произведения групп справедливость аналога теоремы Романовского, вообще говоря, не имеет места.

Для прямого произведения групп аналогичное утверждение тоже может не выполняться: в работе [5] было доказано, что прямое произведение двух свободных групп ранга 2 обладает конечно порожденной подгруппой, которая не является финитно отделимой. Тем не менее известно [9, теорема 4], что прямое произведение двух групп, все циклические подгруппы которых финитно отделимы, является группой, в которой все циклические подгруппы также финитно отделимы.

Цель данной статьи состоит в нахождении условий, при которых прямое произведение групп наследует от сомножителей свойства \mathcal{F}_π -отделимости циклических подгрупп, где π — непустое собственное подмножество множества всех простых чисел. Для более точной постановки этой проблемы следует учитывать, что существует условие, которому должна удовлетворять любая \mathcal{F}_π -отделимая подгруппа. Его формулировка основана на следующем понятии.

Напомним, что если p — некоторое простое число, то подгруппа H группы G называется p -изолированной, если для любого элемента $g \in G$ из включения $g^p \in H$ следует включение $g \in H$. Если π — некоторое множество простых чисел, то подгруппа H группы G называется π -изолированной, если она p -изолирована для любого $p \in \pi$. Наконец, через π' обозначается дополнение множества π в множестве всех простых чисел (так

что, в частности, p' обозначает множество всех простых чисел, отличных от p).

Так вот, хорошо известно (см., напр.: [8, предложение 1.3]), что любая \mathcal{F}_π -отделимая подгруппа группы является π' -изолированной в этой группе. Отметим, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно: В. Г. Бардаков [1], отвечая автору данной статьи [2, вопрос 15.60], доказал, что во всякой свободной неабелевой группе для любого простого числа p существует конечно порожденная p' -изолированная подгруппа, которая не является \mathcal{F}_p -отделимой. Легко видеть, тем не менее, что для любого множества простых чисел π в любой свободной группе каждая π' -изолированная циклическая подгруппа \mathcal{F}_π -отделима.

Следовательно, проблема, отмеченная выше, может быть уточнена следующим образом: при каких условиях прямое произведение двух групп, все π' -изолированные циклические подгруппы которых \mathcal{F}_π -отделимы, является группой, в которой все π' -изолированные циклические подгруппы также \mathcal{F}_π -отделимы? Некоторым ответом на этот вопрос служит следующая

Теорема. Пусть π — некоторое множество простых чисел, группы A и B \mathcal{F}_π -аппроксимируемы и в каждой из этих групп любая π' -изолированная циклическая подгруппа \mathcal{F}_π -отделима. Пусть также в группах A и B π' -изолятор любой циклической подгруппы является циклической подгруппой. Тогда в прямом произведении групп A и B все π' -изолированные циклические подгруппы являются \mathcal{F}_π -отделимыми.

Напомним, что π' -изолятором подгруппы H группы G называется наименьшая π' -изолированная подгруппа группы G , содержащая подгруппу H . Е. В. Соколов [8, лемма 1.6] доказал, что в \mathcal{F}_π -аппроксимируемой группе π' -изолятор любой локально циклической подгруппы является локально циклической подгруппой. Поэтому имеет место

Следствие 1. Пусть группы A и B \mathcal{F}_π -аппроксимируемы и в каждой из этих групп любая π' -изолированная циклическая подгруппа \mathcal{F}_π -отделима. Пусть также группы A и B удовлетворяют условию максимальной стабильности для циклических подгрупп (т. е. каждая возрастающая последовательность циклических подгрупп стабилизируется). Тогда в прямом произведении групп A и B все π' -изолированные циклические подгруппы являются \mathcal{F}_π -отделимыми.

В частности, отметим

Следствие 2. В прямом произведении двух свободных групп все π' -изолированные циклические подгруппы являются \mathcal{F}_π -отделимыми.

В действительности, утверждение следствия 1 представляет собой частный случай более общего результата, полученного в статье [8]. В этой статье рассматриваются условия \mathcal{F}_π -отделимости циклических подгрупп свободного произведения двух групп A и B с коммутирующими подгруппами $H \leq A$ и $K \leq B$, т. е. фактор-группы (обычного) свободного произведения $A * B$ групп A и B по нормальному замыканию взаимного коммутанта $[H, K]$ подгрупп A и B . Поскольку при $H = A$ и $K = B$ эта фактор-группа оказывается прямым произведением групп A и B , в данном частном случае утверждение следствия 1 совпадает с утверждением следствия 3.4 из [8].

В связи с этим естественно возникает вопрос о том, является ли утверждение теоремы более общим, чем утверждение следствия 1. Другими словами, существует ли не удовлетворяющая условию максимальности для циклических подгрупп \mathcal{F}_π -аппроксимируемая группа, в которой все π' -изолированные циклические подгруппы \mathcal{F}_π -отделимы и π' -изолятор каждой циклической подгруппы является циклической группой?

Насколько известно автору, ответа на этот вопрос пока нет. С другой стороны, здесь будет построен пример, говорящий о том, что циклическость π' -изоляторов циклических подгрупп в сомножителях не является необходимым условием \mathcal{F}_π -отделимости всех π' -изолированных подгрупп прямого произведения.

2. Доказательство теоремы

Для доказательства теоремы нам понадобится следующее простое замечание:

Лемма. Пусть a — элемент бесконечного порядка группы G и A — циклическая подгруппа этой группы, порожденная элементом a . Пусть также π — некоторое множество простых чисел. Предположим, что подгруппа A π' -изолирована и что любая подгруппа группы G , лежащая в A и π' -изолированная в группе G , является \mathcal{F}_π -отделимой в этой группе. Тогда для произвольного целого π -числа $m > 0$ существует нормальная подгруппа N конечного π -индекса группы G такая, что порядок по модулю N элемента a делится на m .

В самом деле, поскольку порядок элемента a бесконечен, ни один из элементов a, a^2, \dots, a^{m-1} не принадлежит подгруппе A^m , порожденной элементом a^m . Так как для любого целого числа n включение $a^n \in A^m$ равносильно делимости числа n на число m , подгруппа A^m является p -изолированной в группе A для любого простого числа p , не входящего в π , т. е. является π' -изолированной в группе A . Поскольку π' -изолированная подгруппа π' -изолированной подгруппы π' -изолирована, подгруппа A^m π' -изолирована в группе G и потому \mathcal{F}_π -отделима. Следовательно, существует нормальная подгруппа N конечного π -индекса группы G такая, что ни один из элементов a, a^2, \dots, a^{m-1} не принадлежит подгруппе $A^m N$. Обозначим через r порядок по модулю N элемента a ; другими словами, r есть наименьшее положительное число такое, что $a^r \in N$. Пусть также d — наибольший общий делитель чисел m и r и пусть целые числа x и y таковы, что $mx + ry = d$. Тогда, поскольку $1 \leq d \leq m$ и

$$a^d = a^{mx+ry} = (a^m)^x \cdot (a^r)^y \in A^m N,$$

неравенство $d < m$ невозможно. Следовательно, $d = m$, т. е. число r делится на m , что и требовалось.

Предположим теперь, что $G = A \times B$ — прямое произведение групп A и B , т. е. A и B — подгруппы группы G , $G = AB$, $A \cap B = 1$ и $[A, B] = 1$. Предположим также, что группы A и B \mathcal{F}_π -аппроксимируемы и в каждой из этих групп любая π' -изолированная циклическая подгруппа \mathcal{F}_π -отделима и π' -изолятор любой циклической подгруппы является циклической подгруппой.

Пусть H — циклическая подгруппа группы G и ее порождающий элемент h имеет вид $h = cd$, где $c \in A$ и $d \in B$. Предположим, что подгруппа H π' -изолирована и элемент $g = ab$ (где $a \in A$ и $b \in B$) группы G не принадлежит подгруппе H . Требуется показать, что существует нормальная подгруппа N конечного π -индекса группы G такая, что $g \notin HN$.

Поскольку группа G является \mathcal{F}_π -аппроксимируемой и, как нетрудно видеть, в \mathcal{F}_π -аппроксимируемой группе любая конечная подгруппа \mathcal{F}_π -отделима, подгруппу H можно считать бесконечной.

Обозначим через C циклическую подгруппу группы A , порожденную элементом c , и через D — циклическую подгруппу группы B , порожденную элементом d .

Поскольку подгруппа H бесконечна и потому бесконечен порядок элемента h , для элементов c и d имеются две возможности: либо оба эти элемента имеют бесконечный порядок, либо бесконечен порядок в точности одного из них.

Рассмотрим сначала первую возможность, т. е. будем считать, что c и d — элементы бесконечного порядка.

Пусть $U = (u)$ — π' -изолятор в группе A подгруппы C , $V = (v)$ — π' -изолятор в группе B подгруппы D . Тогда $c = u^k$ и $d = v^l$ для некоторых целых k и l (которые можно без потери общности считать положительными). При этом k и l являются π' -числами.

Действительно, пусть, скажем, $k = k_1 p$ для некоторого простого $p \in \pi$. Так как индекс подгруппы U^p в группе U равен p , подгруппа U^p является π' -изолированной подгруппой группы U и потому π' -изолирована в группе A . Поскольку $c = (u^p)^{k_1}$ и, значит, $C \subseteq U^p$, это противоречит тому, что U является наименьшей π' -изолированной подгруппой, содержащей C .

Заметим также, что числа k и l взаимно просты. Действительно, если t — общий делитель этих чисел и $k = k_1 t$, $l = l_1 t$ для подходящих целых k_1 и l_1 , то $(u^{k_1} v^{l_1})^t = cd \in H$, и так как подгруппа H π' -изолирована и t является π' -числом, имеем $u^{k_1} v^{l_1} \in H$. Поскольку тогда $u^{k_1} v^{l_1} = (u^k v^l)^x$ для некоторого целого x , очевидно, что $|t| = 1$.

Если элемент a не принадлежит подгруппе U , то в силу условия теоремы существует нормальная подгруппа R конечного π -индекса группы A такая, что $a \notin UR$. Тогда $N = RB$ — нормальная подгруппа конечного π -индекса группы G и утверждается, что элемент g не принадлежит подгруппе HN .

В самом деле, в противном случае для некоторого целого числа t и некоторых элементов $x \in R$ и $y \in B$ должно выполняться равенство $g = u^t x y$. Переписав его в виде $ab = c^t x \cdot d^t y$, имеем $a = c^t x \in UR$, что противоречит выбору подгруппы R .

Так как случай, когда элемент b не принадлежит подгруппе V , рассматривается аналогично, остается предположить, что элементы a и b лежат в подгруппах U и V соответственно, т. е. $a = u^m$ и $b = v^n$ для некоторых целых m и n .

Предположим сначала, что m делится на k , т. е. $m = kx$ для некоторого целого числа x . Тогда $n \neq lx$, поскольку иначе

$$ab = u^m v^n = u^{kx} v^{lx} = (u^k v^l)^x = (cd)^x \in H.$$

Таким образом, $v^{n-lx} \neq 1$, и потому элемент v^{n-lx} не входит в некоторую нормальную подгруппу S конечного π -индекса группы B .

Пусть s — порядок элемента v по модулю подгруппы S . Так как числа l и s взаимно просты, существует целое число y такое, что $ly \equiv n \pmod{s}$. Отметим, что числа x и y не сравнимы по модулю s . Действительно, из $x \equiv y \pmod{s}$ следовало бы сравнение $n - lx \equiv n - ly \pmod{s}$, откуда, в свою очередь, мы имели бы

$$v^{n-lx} \equiv v^{n-ly} \equiv 1 \pmod{S},$$

что противоречит выбору S .

В соответствии с леммой в группе A можно выбрать такую нормальную подгруппу R конечного π -индекса, что порядок r по модулю R элемента u делится на s . Тогда $N = RS$ — нормальная подгруппа конечного π -индекса группы G и утверждается, что элемент g не принадлежит подгруппе HN .

Действительно, если, напротив, $g \in h^t N$ для некоторого целого числа t , то $a \equiv c^t \pmod{R}$ и $b \equiv d^t \pmod{S}$, т. е. $u^m \equiv u^{kt} \pmod{R}$ и $v^n \equiv v^{lt} \pmod{S}$. Следовательно, $kx \equiv kt \pmod{r}$ и $ly \equiv lt \pmod{s}$. Так как числа k и r взаимно просты и s делит r , из первого сравнения получаем $x \equiv t \pmod{s}$, и поскольку из второго сравнения следует $y \equiv t \pmod{s}$, имеем $x \equiv y \pmod{s}$, что невозможно, как отмечено выше.

Так как случай, когда n делится на l , рассматривается аналогично, будем считать далее, что m не делится на k и n не делится на l .

Тогда из взаимной простоты чисел k и l следует, что $ml \neq nk$. Поэтому элемент u^{ml-nk} отличен от единицы и потому не входит в некоторую нормальную подгруппу R конечного π -индекса группы A . Следовательно, числа ml и nk не сравнимы по модулю r , где r — порядок элемента u по модулю подгруппы R . Фиксируем также целое число x , удовлетворяющее сравнению $m \equiv kx \pmod{r}$ (и существующее в силу взаимной простоты чисел r и k).

Далее выберем нормальную подгруппу S конечного π -индекса группы B так, чтобы порядок s элемента v по модулю подгруппы S делился на r , и фиксируем целое число y такое, что $n \equiv ly \pmod{s}$ (и потому $n \equiv ly \pmod{r}$).

Тогда $N = RS$ — нормальная подгруппа конечного π -индекса группы G и утверждается, что элемент g не принадлежит подгруппе HN .

Действительно, если, напротив, $g \in h^t N$ для некоторого целого числа t , то $a \equiv c^t \pmod{R}$ и $b \equiv d^t \pmod{S}$, т. е. $u^m \equiv u^{kt} \pmod{R}$ и $v^n \equiv v^{lt} \pmod{S}$. Следовательно, $kx \equiv kt \pmod{r}$ и $ly \equiv lt \pmod{s}$. Так как числа k и r взаимно просты, l и s взаимно просты и s делится на r , из первого сравнения получаем $x \equiv t \pmod{r}$, а из второго имеем $y \equiv t \pmod{r}$. Таким образом, $x \equiv y \pmod{r}$. Отсюда имеем

$$ml \equiv (kx)l = (lx)k \equiv (ly)k \equiv nk \pmod{r},$$

что невозможно в силу выбора R .

Перейдем к рассмотрению второй возможности. Для определенности предположим, что порядок элемента c бесконечен, а порядок элемента d конечен и равен s . Так как группа B \mathcal{F}_π -аппроксимируема и ее подгруппа D конечна, то D является \mathcal{F}_π -отделимой и, следовательно, π' -изолиро-

ванной подгруппой группы B . Покажем, что в этом случае и подгруппа C π' -изолирована в группе A .

Пусть, напротив, существуют простое число p , не входящее в множество π , и элемент $f \in A \setminus C$ такие, что $f^p \in C$, т. е. $f^p = c^t$ для некоторого целого t . Так как числа p и s взаимно просты, существует целое x такое, что $t \equiv px \pmod{s}$. Тогда $d^t = d^{px}$ и потому $(fd^x)^p = f^p d^{xp} = c^t d^t = h^t$. Поскольку элемент fd^x не входит в H , это противоречит π' -изолированности H .

Если элемент a не принадлежит подгруппе C или элемент b не принадлежит подгруппе D , то в силу \mathcal{F}_π -отделимости этих подгрупп найдутся такие нормальные подгруппы R или S конечных π -индексов групп A или B соответственно, что $a \notin CR$ или $b \notin DS$. Как и выше, нетрудно видеть, что тогда $g \notin H(RB)$ или $g \notin H(AS)$.

Остается рассмотреть случай, когда элементы a и b лежат в подгруппах C и D соответственно, т. е. $a = c^m$ и $b = d^n$ для некоторых целых чисел m и n .

Так как группа B \mathcal{F}_π -аппроксимируема, в ней существует нормальная подгруппа S конечного π -индекса, не содержащая ни одного из (неединичных) элементов d, d^2, \dots, d^{s-1} ; тогда, очевидно, порядок по модулю S элемента d равен s . Выберем также нормальную подгруппу R конечного π -индекса группы A так, чтобы порядок r по модулю R элемента u делился на s . Тогда $N = RS$ — нормальная подгруппа конечного π -индекса группы G и снова утверждается, что элемент g не принадлежит подгруппе HN .

Действительно, включение $g \in HN$, как и выше, означает, что для некоторого целого числа t имеют место сравнения $m \equiv t \pmod{r}$ и $n \equiv t \pmod{s}$. Так как r делится на s , из первого сравнения получаем $m \equiv t \pmod{s}$, так что $m \equiv n \pmod{s}$. Следовательно, в группе B выполняется равенство $d^m = d^n$, и потому в группе G

$$g = ab = c^m d^n = (c^d)^m = h^m,$$

что противоречит предположению $g \notin H$.

Теорема доказана.

3. Построение примера

Фиксируем простое число p и обозначим через A группу, заданную представлением

$$\langle a_1, a_2, \dots; a_i = a_{i+1}^p (i \in \mathbb{N}) \rangle.$$

Пусть также B — бесконечная циклическая группа с порождающим b и $G = A \times B$ — прямое произведение групп A и B . Будет показано, что если π — множество, состоящее из всех простых чисел, отличных от p (так что $\pi' = \{p\}$), то группа A \mathcal{F}_π -аппроксимируема и любая π' -изолированная подгруппа этой группы является \mathcal{F}_π -отделимой. Вместе с тем очевидно, что, например, π' -изолятор циклической подгруппы группы A , порождаемой элементом a_i , совпадает со всей группой A и, следовательно, циклической группой не является.

Начнем с перечисления ряда необходимых нам свойств группы A . Очевидной индукцией проверяется, что для любых положительных целых чисел i и k выполнено равенство $a_i = a_{i+k}^{p^k}$. Хорошо известно, что эта груп-

па изоморфна состоящей из p -ичных дробей подгруппе аддитивной группы рациональных чисел. Отсюда следует, что группа A не имеет кручения и произвольный неединичный элемент $g \in A$ однозначно представим в виде $g = a_i^m$ для некоторых целых $i > 0$ и m , причем при $i > 1$ число m на p не делится. Такую запись элемента g будем называть канонической. Вводимые всюду ниже записи элементов группы по умолчанию предполагаются каноническими.

Следующее утверждение, по-видимому, также хорошо известно.

Предложение 1. *Для любого простого числа q , отличного от p , группа A является \mathcal{F}_q -аппроксимлируемой.*

Действительно, если $C(q^n)$ — циклическая группа порядка q^n с порождающим c и t — решение сравнения $px \equiv 1 \pmod{q^n}$, то отображение $a_i \mapsto c^{t^{i-1}}$ ($i = 1, 2, \dots$) определяет гомоморфизм φ_n группы A на группу $C(q^n)$. При этом, поскольку числа t и q взаимно просты, для любого i порядок элемента $a_i \varphi_n$ равен q^n . Следовательно, если $g = a_i^m$ — неединичный элемент группы A , то для любого n такого, что число m не делится на q^n , имеем $g \varphi_n \neq 1$.

Перейдем теперь к рассмотрению свойств циклических подгрупп группы G .

Предложение 2. *Пусть H — циклическая подгруппа группы G , порожденная элементом $h = a_i^k b^l$, и пусть $g = a_j^r b^s$ — неединичный элемент группы G . Тогда*

- 1) *если одно из чисел l и s равно нулю, а другое отлично от нуля, то элемент g не принадлежит подгруппе H ;*
- 2) *если $l = s = 0$, то элемент g принадлежит подгруппе H тогда и только тогда, когда $j \leq i$ и r делится на k ;*
- 3) *если числа l и s отличны от нуля, то элемент g принадлежит подгруппе H тогда и только тогда, когда $j \leq i$ и существует целое число m такое, что $s = lm$, $m = m_1 p^{i-j}$ для некоторого целого m_1 и $r = km_1$.*

Доказательство. Если $l = 0$ и $s \neq 0$, то $H \leq A$, а элемент g не входит в A и потому не входит в H . Если $l \neq 0$ и $s = 0$, то $H \cap A = 1$, а элемент g лежит в подгруппе A и отличен от 1, так что и в этом случае $g \notin H$.

Если $l = s = 0$, то $g \in H$ тогда и только тогда, когда для некоторого целого числа n выполнено равенство $a_j^r = a_i^{kn}$. Если $j > i$, то $a_i = a_j^{p^{j-i}}$ и это равенство принимает вид $a_j^r = a_j^{knp^{j-i}}$, что равносильно равенству $r = knp^{j-i}$. Но это противоречит каноничности записи элемента g .

Таким образом, $j \leq i$, и так как тогда $a_j = a_i^{p^{i-j}}$, равенство $a_j^r = a_i^{kn}$ равносильно равенству $rp^{i-j} = kn$. Отсюда ввиду каноничности записи элемента h имеем $n = n_1 p^{i-j}$ для некоторого целого числа n_1 , и потому $r = kn_1$.

Будем считать теперь, что числа l и s отличны от нуля и предположим сначала, что элемент g принадлежит подгруппе H , т. е. для некоторого целого числа m выполнено равенство $g = h^m$. Это равенство равносильно, очевидно, системе равенств $a_j^r = a_i^{km}$ и $b^s = b^{lm}$, и в силу второго из них $s = lm$. Докажем теперь, что $j \leq i$.

Если, напротив, $j > i$, то $j > 1$, и потому число r не делится на p .

Кроме того, $a_i = a_j^{p^{j-i}}$, и равенство $a_j^r = a_i^{km}$ принимает вид $a_j^r = a_j^{kmp^{j-i}}$. Поскольку A является группой без кручения, отсюда получаем $r = kmp^{j-i}$, что невозможно, так как $j - i > 0$ и r на p не делится.

Таким образом, неравенство $j \leq i$ действительно справедливо. Поэтому $a_j = a_i^{p^{i-j}}$, и на этот раз равенство $a_j^r = a_i^{km}$ принимает вид $a_i^{rp^{i-j}} = a_i^{km}$, откуда имеем $rp^{i-j} = km$. Поскольку при $i > j$ число k взаимно просто с p , в этом случае $m = m_1p^{i-j}$ для некоторого целого числа m_1 . Полагая $m_1 = m$ при $i = j$, в любом случае имеем $m = m_1p^{i-j}$ и $r = km_1$.

Наоборот, если все условия из формулировки предложения выполнены, то

$$h^m = a_i^{km} b^{lm} = a_i^{km_1p^{i-j}} b^s = a_i^{rp^{i-j}} b^s = a_j^r b^s = g,$$

так что $g \in H$ и предложение доказано.

Предложение 3. *Подгруппа H группы G , порожденная элементом $h = a_i^k b^l$, является p -изолированной тогда и только тогда, когда число l взаимно просто с p .*

Доказательство. Предположим сначала, что числа l и p взаимно просты и что для элемента $g = a_j^r b^s$ группы G имеет место включение $g^p \in H$. Поскольку $g^p = a_j^{rp} b^{sp}$ и $l \neq 0$, то в соответствии с предложением 2 выполнено неравенство $j \leq i$ и существует целое число m такое, что $sp = lm$ и $m = m_1p^{i-j}$ для некоторого целого m_1 и $rp = km_1$. Далее рассмотрим отдельно два случая в зависимости от значения разности $i - j$.

Если $i - j > 0$, то $i > 1$, и потому числа k и p взаимно просты. Поэтому из равенства $rp = km_1$ следует, что $m_1 = m_2p$ для некоторого целого m_2 , откуда получаем $r = km_2$. Кроме того, полагая $m' = m_2p^{i-j}$, имеем $m = m'p$, и потому из равенства $sp = lm$ следует равенство $s = lm'$. Таким образом, для элемента g и числа m' выполнены все условия предложения 2, гарантирующие включение $g \in H$.

Пусть теперь $i = j$, так что $m_1 = m$. Из равенства $sp = lm$ ввиду взаимной простоты чисел l и p следует, что $m = m'p$ для некоторого целого m' , и потому $s = lm'$. Кроме того, равенство $rp = km_1$ принимает вид $r = km'$, и включение $g \in H$ выполнено и в этом случае.

Таким образом, доказано, что при взаимно простых l и p подгруппа H является p -изолированной.

Наоборот, если $l = l_1p$ для некоторого целого числа l_1 , то для элемента $f = a_{i+1}^k b^{l_1}$ будем иметь $f^p = a_{i+1}^{kp} b^{l_1p} = a_i^k b^l = h$, так что $f^p \in H$. Но элемент f в силу предложения 2 не входит в подгруппу H , так как $i + 1 > i$. Следовательно, H не является p -изолированной.

Предложение 4. *Пусть π — множество всех простых чисел, отличных от числа p . Каждая π' -изолированная циклическая подгруппа группы G является \mathcal{F}_π -аппроксимирваемой.*

Доказательство. Пусть, как и выше, H — циклическая подгруппа группы G , порожденная элементом $h = a_i^k b^l$. Предположим, что H является π' -изолированной подгруппой; поскольку множество π' состоит из единственного числа p , в силу предложения 3 это означает, что число l не делится на p (и потому отлично от 0).

Предположим также, что элемент $g = a_j^r b^s$ не принадлежит подгруппе H , и покажем, что тогда в группе G существует нормальная подгруппа N конечного π -индекса такая, что g не принадлежит подгруппе HN . Поскольку $g \notin H$ и $l \neq 0$, то в силу предложения 2 либо $s = 0$, либо $s \neq 0$ и должно нарушаться одно из условий пункта 3 этого предложения. Рассмотрим последовательно все эти случаи.

1. Число s равно 0. Тогда $r \neq 0$ (так как $g \neq 1$), и потому можно выбрать простое число q , отличное от p и взаимно простое с каждым из чисел r и l . Покажем, что подгруппа $N = A^q B^q$ является искомой.

Действительно, ее индекс в группе G равен π -числу q^2 , а предположение о том, что $g \in HN$, равносильно выполнимости равенств $a_j^r = a_i^{kx} a_u^{yq}$ и $1 = b^{lx+zq}$ для некоторых целых чисел x, y, z и натурального u . Второе из них влечет $q|x$, и потому из первого вытекает включение $a_j^r \in A^q$, что противоречит взаимной простоте чисел r и q .

2. Число s отлично от 0, но не делится на l . Так как тогда $|l| > 1$, число l обладает простым делителем q , который в силу взаимной простоты l и p отличен от p и потому входит в π . Легко видеть, что подгруппа $N = AB^q$ является в этом случае искомой.

В самом деле, если элемент g принадлежит подгруппе HN , то $g = h^n uv$ для некоторого целого числа n и некоторых элементов $u \in A$ и $v \in B^q$. Очевидно, что тогда выполнено равенство $b^s = b^{ln} v$, из которого следует включение $b^s \in B^l$, противоречащее предположению.

3. Число s отлично от 0, для некоторого целого числа m выполнено равенство $s = lm$ и $j > i$. Так как в этом случае r не делится на p (поскольку $j > 1$), число $r - kmp^{j-i}$ отлично от нуля. Выберем простое число q , отличное от p , взаимно простое с l и не делящее числа $r - kmp^{j-i}$. Покажем, что в этом случае искомой является подгруппа $N = A^q B^q$.

В самом деле, если элемент g принадлежит подгруппе HN , то $g = h^n uv$ для некоторого целого числа n и некоторых элементов $u \in A^q$ и $v \in B^q$. Это равенство равносильно системе равенств $a_j^r = a_i^{kn} u$ и $b^s = b^{ln} v$. Поскольку в этом случае $a_i = a_j^{p^{j-i}}$, первое из них принимает вид $a_j^r = a_j^{knp^{j-i}} u$ и потому равносильно сравнению $r \equiv knp^{j-i} \pmod{q}$. Второе равенство равносильно сравнению $s \equiv ln \pmod{q}$, которое в силу того, что $s = lm$ и $(l, q) = 1$, равносильно сравнению $n \equiv m \pmod{q}$. Поэтому сравнение $r \equiv knp^{j-i} \pmod{q}$ принимает вид $r \equiv kmp^{j-i} \pmod{q}$, что противоречит выбору q .

4. Предположим теперь, что $s \neq 0$, $j \leq i$, $s = lm$ для некоторого целого числа m и число m не делится на p^{i-j} . Так как в этом случае $i - j > 0$ и числа k и p взаимно просты, то число $rp^{i-j} - km$ отлично от нуля. Поэтому можно выбрать простое число q , отличное от p , взаимно простое с l и не делящее числа $rp^{i-j} - km$. Покажем, что и в этом случае подгруппа $N = A^q B^q$ является искомой.

Действительно, из предположения о справедливости включения $g \in HN$ следует, в частности, что для некоторого целого числа n имеют место сравнения $a_j^r \equiv a_i^{kn} \pmod{A^q}$ и $b^s \equiv b^{ln} \pmod{B^q}$. Так как в этом случае $a_j = a_i^{p^{i-j}}$, из первого имеем $a_i^{rp^{i-j}} \equiv a_i^{kn} \pmod{A^q}$, откуда получаем $rp^{i-j} \equiv kn \pmod{q}$. Сравнение $b^s \equiv b^{ln} \pmod{B^q}$ дает $s \equiv ln \pmod{q}$,

что вместе с равенством $s = lm$ и условием $(l, q) = 1$ влечет сравнение $n \equiv m \pmod{q}$. Таким образом, приходим к сравнению $rp^{i-j} \equiv km \pmod{q}$, противоречащему выбору q .

5. Оставшийся случай, когда $s \neq 0$, $j \leq i$, $s = lm$ для некоторого целого числа m и $m = m_1 p^{i-j}$ для некоторого m_1 , но $r \neq km_1$, рассматривается аналогично. Если простое число q выбрать отличным от p , взаимно простым с l и не делящим разности $r - km_1$ и снова положить $N = A^q B^q$, то предположение о справедливости включения $g \in HN$ повлечет сравнение $rp^{i-j} \equiv km_1 p^{i-j}$, равносильное сравнению $r \equiv km_1$. Предложение 4 доказано.

Таким образом, в силу предложений 1 и 4 группа G \mathcal{F}_π -аппроксимирема и любая ее π' -изолированная циклическая подгруппа \mathcal{F}_π -отделима. Вместе с тем прямой сомножитель A группы G обладает циклическими подгруппами, π' -изоляторы которых циклическими не являются.

Библиографический список

1. Бардаков В. Г. К вопросу Д. И. Молдавского о p -отделимости подгрупп свободной группы // Сибирский математический журнал. 2004. Т. 45, № 3. С. 505–509.
2. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. 15-е изд. Новосибирск : Новосиб. гос. ун-т, 2002. 172 с.
3. Магнус В., Каррас А., Солитэр Д. Комбинаторная теория групп. М. : Наука, 1974. 455 с.
4. Романовский Н. С. О финитной аппроксимиремости свободных произведений относительно вхождения // Известия АН СССР. Сер. математическая. 1969. Т. 33, № 6. С. 1324–1329.
5. Allenby R., Gregorac R. On locally extended residually finite groups // Lecture Notes Math. 1973. Vol. 319. P. 9–17.
6. Hall M. Coset representations in free groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1949. Vol. 67. P. 421–432.
7. Meskin S. Nonresidually finite one-relator groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 164. P. 105–114.
8. Sokolov E. V. On the cyclic subgroup separability of the free product of two groups with commuting subgroups // Int. J. Algebra Comput. 2014. Vol. 24, № 5. P. 741–756.
9. Stebe P. Residual finiteness of a class of knot groups // Comm. Pure Appl. Math. 1968. Vol. 21. P. 563–583.

УДК 519.688

Е. В. Соколов

АЛГОРИТМЫ ПОЛУЧЕНИЯ ОБЩЕГО СЕКРЕТНОГО КЛЮЧА, ИСПОЛЬЗУЮЩИЕ ГРУППЫ С ТОЖДЕСТВАМИ

Приводятся обобщения двух известных криптографических алгоритмов получения общего секретного ключа, использующие в качестве базовой произвольную группу, удовлетворяющую нетривиальному тождеству определенного вида.

Ключевые слова: криптография с открытым ключом, проблема поиска сопрягающего элемента, проблема поиска разложения элемента.

© Соколов Е. В., 2017

We obtain the generalizations of two known key agreement cryptographic protocols based on an arbitrary group satisfying certain nontrivial identity.

Key words: public-key cryptography, conjugacy search problem, decomposition search problem.

Пусть имеется некоторая группа G . Классическая *проблема сопряженности* для этой группы формулируется следующим образом: для заданных элементов $g_1, g_2 \in G$ определить, существует ли элемент x такой, что выполняется соотношение $g_1 = x^{-1}g_2x$. Наряду с проблемой сопряженности рассматривают и *проблему поиска сопрягающего элемента* (см., напр.: [1]): для заданных сопряженных элементов $g_1, g_2 \in G$ найти хотя бы один элемент x , удовлетворяющий условию $g_1 = x^{-1}g_2x$.

Если множество элементов группы G рекурсивно перечислимо и в G разрешима проблема равенства, то для отыскания сопрягающего элемента достаточно перечислять все элементы $x \in G$ и для каждого из них сравнивать элемент $x^{-1}g_2x$ с g_1 . Рано или поздно элемент x , для которого выполняется равенство $g_1 = x^{-1}g_2x$, будет найден. Однако описанный алгоритм, как правило, имеет экспоненциальную сложность. Если неизвестно, существует ли другой, полиномиальный, алгоритм для решения проблемы поиска сопрягающего элемента, а операция сопряжения элемента группы G имеет полиномиальную сложность, то для заданного элемента $g \in G$ функция $f_g: G \rightarrow G$, переводящая элемент $x \in G$ в $x^{-1}gx$, оказывается односторонней: алгоритм вычисления $f_g(x)$ имеет полиномиальную сложность, в то время как алгоритм вычисления $f_g^{-1}(y)$ — экспоненциальную. Поэтому данная функция может применяться для построения криптографических протоколов.

Примером такого применения служит алгоритм получения общего секретного ключа, предложенный в [2]. Задача отыскания общего секрета состоит в том, чтобы два участника обмена информацией (обычно их называют Элис и Боб), пользуясь только открытыми (т. е. известными всем) данными и передавая информацию по открытым каналам связи, могли сгенерировать некоторый общий для них секрет (например, элемент группы), который никто другой за разумное время определить был бы не в состоянии.

Алгоритм 1 [2]. Имеются открытые группа G и элемент $g \in G$, а также множество S попарно перестановочных между собой элементов группы G .

Элис произвольным образом выбирает элемент $a \in S$ и передает Бобу элемент $g_1 = a^{-1}ga$. В то же время Боб выбирает элемент $b \in S$ и передает Элис элемент $g_2 = b^{-1}gb$. После этого Элис сопрягает принятый ею элемент g_2 при помощи известного только ей элемента a и получает элемент $a^{-1}(b^{-1}gb)a$. Боб действует аналогичным образом, сопрягая g_1 при помощи b и получая $b^{-1}(a^{-1}ga)b$. Так как элементы a и b были выбраны из множества S , они перестановочны, и потому

$$a^{-1}(b^{-1}gb)a = x = b^{-1}(a^{-1}ga)b$$

— общий секрет.

Потенциальному взломщику известны группа G , множество S и элементы g, g_1, g_2 , но неизвестны элементы a и b , хотя бы один из которых

нужен для получения x из g_1 или g_2 . Чтобы узнать a или b , и нужно решить проблему поиска сопрягающего элемента.

При практической реализации данного алгоритма определенные трудности вызывает выбор группы G , так как она должна обладать, с одной стороны, множеством S попарно перестановочных элементов достаточно большой мощности, а с другой — трудноразрешимой проблемой поиска сопрягающего элемента. Автором предложено обобщение описанного алгоритма, в котором множество S по-прежнему удовлетворяет нетривиальному тождеству, но оно уже необязательно является коммутатором. Так, например, данное обобщение может использоваться в качестве базовой группы треугольных или унитарных матриц небольшой размерности над конечным полем.

Введем сначала ряд обозначений. Пусть w — некоторое слово в алфавите $\{x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_l\}$. Максимальное (по включению) подслово слова w , состоящее только из символов x_1, x_2, \dots, x_k , будем называть x -слогом, максимальное подслово, состоящее только из символов y_1, y_2, \dots, y_l , — y -слогом. Количество слогов в слове w назовем его *слоговой длиной* (в отличие от обычной длины, равной количеству символов в слове w).

Далее будем считать, что слово w начинается с x -слога и имеет слоговую длину, кратную 4. Тогда w можно записать в виде произведения двух слов u и v равной слоговой длины:

$$w = uv, \quad u = u_1u_2 \dots u_{2n}, \quad v = v_1v_2 \dots v_{2n}.$$

При этом u_i и v_i являются x -слогами, если i — нечетно, и y -слогами в противном случае.

Алгоритм 2. Пусть имеются открытые группа G , фиксированный элемент $g \in G$ и подмножества $A_1, A_2, \dots, A_k, B_1, B_2, \dots, B_l$ элементов группы G , удовлетворяющие условию

$$\forall a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_k \in A_k, b_1 \in B_1, b_2 \in B_2, \dots, b_l \in B_l \\ w(a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_l) = 1.$$

0. Элис выбирает закрытые элементы $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_k \in A_k$, Боб — закрытые элементы $b_1 \in B_1, b_2 \in B_2, \dots, b_l \in B_l$.

1. Элис вычисляет и передает Бобу элемент

$$s_1 = u_1(\mathbf{a}, \mathbf{b})^{-1} g u_1(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

(здесь и далее кортежи

$$(a_1, a_2, \dots, a_k) \quad \text{и} \quad (b_1, b_2, \dots, b_l)$$

обозначены для краткости через \mathbf{a} и \mathbf{b}).

2. Боб вычисляет и передает Элис элемент

$$t_{2n} = v_{2n}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) g v_{2n}(\mathbf{a}, \mathbf{b})^{-1}.$$

3. Получив элемент t_{2m} ($1 \leq m \leq n$), Элис вычисляет элемент

$$t_{2m-1} = v_{2m-1}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) t_{2m} v_{2m-1}(\mathbf{a}, \mathbf{b})^{-1}$$

и, если $m \neq 1$, передает его Бобу.

4. Получив элемент s_{2m-1} ($1 \leq m \leq n$), Боб вычисляет элемент

$$s_{2m} = u_{2m}(\mathbf{a}, \mathbf{b})^{-1} s_{2m-1} u_{2m}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

и, если $m \neq n$, передает его Элис.

5. Получив элемент s_{2m} ($1 \leq m \leq n-1$), Элис вычисляет и передает Бобу элемент

$$s_{2m+1} = u_{2m+1}(\mathbf{a}, \mathbf{b})^{-1} s_{2m} u_{2m+1}(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

6. Получив элемент t_{2m-1} ($2 \leq m \leq n$), Боб вычисляет и передает Элис элемент

$$t_{2m-2} = v_{2m-2}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) t_{2m-1} v_{2m-2}(\mathbf{a}, \mathbf{b})^{-1}.$$

Можно заметить, что в процессе вычислений Элис, кроме полученных от Боба элементов, использует лишь слоги слов u и v с нечетными индексами, которые являются x -слогами и, значит, зависят только от \mathbf{a} . Бобу, напротив, требуются лишь y -слоги, зависящие только от \mathbf{b} . Таким образом, закрытая информация между Элис и Бобом не передается.

Алгоритм завершается, когда Элис вычислит элемент t_1 , а Боб — элемент s_{2n} . При этом оказывается, что

$$s_{2n} = u(\mathbf{a}, \mathbf{b})^{-1} g u(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad t_1 = v(\mathbf{a}, \mathbf{b}) g v(\mathbf{a}, \mathbf{b})^{-1}.$$

Далее необходимо вспомнить, что $w = uv$ и $w(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 1$ в силу выбора элементов a_i и b_j . Стало быть,

$$u(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = v(\mathbf{a}, \mathbf{b})^{-1},$$

и потому $s_{2n} = t_1$. Это и есть общий секретный ключ.

Как и в алгоритме 1, для взлома необходимо определить либо элемент $u_{2n}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, либо элемент $v_1(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. И то, и другое требует, по крайней мере, однократного решения проблемы поиска сопрягающего элемента.

Рассмотрим теперь еще одну алгоритмическую проблему, называемую *проблемой поиска разложения элемента* [1]: для заданных элементов $g_1, g_2 \in G$ и подмножеств $A, B \subseteq G$ найти элементы $a \in A, b \in B$, удовлетворяющие условию $g_1 = ag_2b$, если известно, что хотя бы одна пара таких элементов существует. Алгоритм отыскания общего секретного ключа, основанный на сложности решения данной проблемы, предложен в [3] и формулируется следующим образом.

Алгоритм 3 [3]. Имеются открытые группа G и элемент $g \in G$, а также поэлементно перестановочные подмножества $A, B \subseteq G$.

Элис произвольным образом выбирает элементы $a_1 \in A, b_1 \in B$ и передает Бобу элемент $g_1 = a_1 g b_1$. Аналогично Боб выбирает элементы $a_2 \in A, b_2 \in B$ и передает Элис элемент $g_2 = b_2 g a_2$. После этого Элис вычисляет элемент $a_1 g_2 b_1 = a_1 b_2 g a_2 b_1$, Боб — элемент $b_2 g_1 a_2 = b_2 a_1 g b_1 a_2$. Поскольку $[a_1, b_2] = 1 = [a_2, b_1]$, указанные элементы равны и определяют общий секретный ключ.

Приведенный алгоритм также можно обобщить, отказавшись от требования поэлементной перестановочности подмножеств A и B .

Алгоритм 4. Пусть слова w, u, v , группа G , элемент $g \in G$ и подмножества $A_1, A_2, \dots, A_k, B_1, B_2, \dots, B_l \subseteq G$ удовлетворяют тем же ограничениям, что и в алгоритме 2.

0. Элис выбирает закрытые элементы

$$a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_k \in A_k, d_1 \in B_1, d_2 \in B_2, \dots, d_l \in B_l,$$

Боб — закрытые элементы

$$b_1 \in B_1, b_2 \in B_2, \dots, b_l \in B_l, c_1 \in A_1, c_2 \in A_2, \dots, c_k \in A_k.$$

Кортежи (a_1, a_2, \dots, a_k) , (b_1, b_2, \dots, b_l) , (c_1, c_2, \dots, c_k) и (d_1, d_2, \dots, d_l) далее для краткости будем обозначать через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} и \mathbf{d} соответственно.

1. Элис вычисляет и передает Бобу элемент

$$q_1 = u_1(\mathbf{a}, \mathbf{b})^{-1} g v_{2n}(\mathbf{c}, \mathbf{d})^{-1}.$$

2. Боб вычисляет и передает Элис элемент

$$r_1 = v_{2n}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) g u_1(\mathbf{c}, \mathbf{d}).$$

3. Получив элемент r_{2m-1} ($1 \leq m \leq n$), Элис вычисляет элемент

$$r_{2m} = v_{2n+1-2m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) r_{2m-1} u_{2m}(\mathbf{c}, \mathbf{d})$$

и, если $m \neq n$, передает его Бобу.

4. Получив элемент q_{2m-1} ($1 \leq m \leq n$), Боб вычисляет элемент

$$q_{2m} = u_{2m}(\mathbf{a}, \mathbf{b})^{-1} q_{2m-1} v_{2n+1-2m}(\mathbf{c}, \mathbf{d})^{-1}$$

и, если $m \neq n$, передает его Элис.

5. Получив элемент q_{2m} ($1 \leq m \leq n-1$), Элис вычисляет и передает Бобу элемент

$$q_{2m+1} = u_{2m+1}(\mathbf{a}, \mathbf{b})^{-1} q_{2m} v_{2n-2m}(\mathbf{c}, \mathbf{d})^{-1}.$$

6. Получив элемент r_{2m} ($1 \leq m \leq n-1$), Боб вычисляет и передает Элис элемент

$$r_{2m+1} = v_{2n-2m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) r_{2m} u_{2m+1}(\mathbf{c}, \mathbf{d}).$$

Снова заметим, что в процессе вычислений Элис использует лишь x -слоги слов $u(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $v(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ и y -слоги слов $u(\mathbf{c}, \mathbf{d})$, $v(\mathbf{c}, \mathbf{d})$, которые зависят только от \mathbf{a} и \mathbf{d} соответственно. Аналогично Бобу требуются y -слоги слов $u(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $v(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ и x -слоги слов $u(\mathbf{c}, \mathbf{d})$, $v(\mathbf{c}, \mathbf{d})$, зависящие от \mathbf{b} и \mathbf{c} .

Алгоритм завершается, когда Элис вычислит элемент r_{2n} , Боб — элемент q_{2n} . Так как

$$\begin{aligned} q_{2n} &= u(\mathbf{a}, \mathbf{b})^{-1} g v(\mathbf{c}, \mathbf{d})^{-1}, & r_{2n} &= v(\mathbf{a}, \mathbf{b}) g u(\mathbf{c}, \mathbf{d}), \\ u(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= v(\mathbf{a}, \mathbf{b})^{-1}, & u(\mathbf{c}, \mathbf{d}) &= v(\mathbf{c}, \mathbf{d})^{-1}, \end{aligned}$$

то $q_{2n} = r_{2n}$ — общий секретный ключ, что и требовалось.

Библиографический список

1. Myasnikov A., Shpilrain V., Ushakov A. Group-Based Cryptography. Basel : Birkhäuser Verlag, 2008. 183 p.
2. New public-key cryptosystem using braid groups / K. H. Ko, S. J. Lee, J. H. Cheon, J. W. Han, J. Kang, C. Park // Advances in Cryptology — CRYPTO 2000. Berlin : Springer, 2000. P. 166—183. (Lecture Notes in Computer Sciences ; iss. 1880).
3. Shpilrain V., Ushakov A. Thomson's group and public key cryptography // Applied Cryptography and Network Security — ACNS 2005. Berlin : Springer, 2005. P. 151—164. (Lecture Notes in Computer Sciences ; iss. 3531).

УДК 512.714

Ю. А. Хашина

БИКВАДРАТИЧНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ В ВИДЕ СУММЫ КВАДРАТОВ

Если биквадратичная функция может быть представлена в виде суммы нескольких полных квадратов билинейных функций, то ее можно представить в виде суммы не более трех таких слагаемых и неотрицательной константы.

Ограниченная снизу биквадратичная функция с положительным старшим коэффициентом может быть представлена в виде суммы трех квадратов билинейных функций, имеющих общий ноль, и константы, равной наименьшему значению биквадратичной функции.

Ключевые слова: биквадратичная функция, экстремум.

If the biquadratic function can be represented as a sum of several complete squares of bilinear functions, than it can be represent in the form of a sum of not more than three such terms and non-negative constant.

If the biquadratic function with positive leading coefficient bounded from below, than it can be represented as a sum of three squares of bilinear functions with common zero and biquadratic functions minimum.

Key words: biquadratic function, extremum.

Биквадратичная функция — это многочлен от двух переменных, квадратичный по каждой из них:

$$a_{22}x^2y^2 + 2a_{21}x^2y + 2a_{12}xy^2 + a_{20}x^2 + 2a_{11}xy + a_{02}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{01}y + a_{00}.$$

Биквадратичные функции появляются, например, при решении некоторых задач компьютерной графики. Они часто возникают как суммы квадратов билинейных функций. Желательно получить эффективный способ нахождения минимума неотрицательной биквадратичной функции.

Теорема 1. *Если биквадратичная функция может быть представлена в виде суммы нескольких полных квадратов билинейных функций:*

$$a_{22}x^2y^2 + 2a_{21}x^2y + 2a_{12}xy^2 + a_{20}x^2 + a_{02}y^2 + 2a_{11}xy + 2a_{10}x + 2a_{01}y + a_{00} = \sum_{k=1}^n (\alpha_k xy + \beta_k x + \gamma_k y + \delta_k)^2, \quad (1)$$

то ее можно представить в виде:

- суммы не более четырех таких слагаемых;
- суммы не более трех таких слагаемых и неотрицательной константы.

Доказательство. Существование представления (1) эквивалентно равенству соответствующих коэффициентов:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 = a_{22} \\ \sum_{k=1}^n \beta_k^2 = a_{20} \\ \sum_{k=1}^n \gamma_k^2 = a_{02} \\ \sum_{k=1}^n \delta_k^2 = a_{00} \\ \sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_k = a_{21} \\ \sum_{k=1}^n \alpha_k \gamma_k = a_{12} \\ \sum_{k=1}^n \beta_k \delta_k = a_{10} \\ \sum_{k=1}^n \gamma_k \delta_k = a_{01} \\ \sum_{k=1}^n \alpha_k \delta_k + \sum_{k=1}^n \beta_k \gamma_k = a_{11} \end{array} \right. \quad (2)$$

или, в векторной форме,

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha^2 = a_{22} \\ \beta^2 = a_{20} \\ \gamma^2 = a_{02} \\ \delta^2 = a_{00} \\ \alpha\beta = a_{21} \\ \alpha\gamma = a_{12} \\ \beta\delta = a_{10} \\ \gamma\delta = a_{01} \\ \alpha\delta + \beta\gamma = a_{11}, \end{array} \right. \quad (3)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — векторы строк коэффициентов.

Выберем ортонормированный базис линейной оболочки $\langle \alpha, \beta, \gamma, \delta \rangle$. В этом базисе векторы $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ будут задаваться не более чем четырьмя координатами. Равенства (3), а следовательно, и равенства (2) будут выполнены, что означает существование представления (1) для $n \leq 4$.

Далее, выберем ортонормированный базис линейной оболочки $\langle \alpha, \beta, \gamma, \delta \rangle$ так, чтобы α, β и γ являлись линейными комбинациями первых трех векторов этого базиса. Тогда $\alpha_4 = \beta_4 = \gamma_4 = 0$ и четвертое слагаемое разложения (1) равно δ_4^2 .

Следствие 1. *Необходимым условием существования представления (1) является выполнение неравенств*

$$a_{22} \geq 0, \quad a_{20} \geq 0, \quad a_{02} \geq 0, \quad a_{00} \geq 0$$

и, согласно неравенству Коши — Буняковского, неравенств

$$a_{22}a_{20} \geq a_{21}^2, \quad a_{22}a_{02} \geq a_{12}^2, \quad a_{00}a_{20} \geq a_{10}^2, \quad a_{00}a_{02} \geq a_{01}^2.$$

Следствие 2 (сферическая интерпретация). Пусть $\delta_4 = 0$ и выполнены необходимые условия из следствия 1. Рассмотрим трехмерные единичные векторы $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ такие, что

$$\begin{aligned}\cos(\alpha, \beta) &= \frac{a_{21}}{\sqrt{a_{22}a_{20}}}, \quad \cos(\alpha, \gamma) = \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{22}a_{02}}}, \\ \cos(\beta, \delta) &= \frac{a_{10}}{\sqrt{a_{20}a_{00}}}, \quad \cos(\gamma, \delta) = \frac{a_{01}}{\sqrt{a_{02}a_{00}}}, \\ \cos(\alpha, \delta)\sqrt{a_{22}a_{00}} + \cos(\beta, \gamma)\sqrt{a_{20}a_{02}} &= a_{11}.\end{aligned}$$

Таким образом, задача нахождения представления биквадратичной функции в виде суммы трех квадратов билинейных функций сводится к решению на единичной сфере четырехугольника по его сторонам и линейному соотношению длин диагоналей.

Предложение 1 [2]. Биквадратичная функция с положительным старшим коэффициентом заменой координат может быть приведена к каноническому виду

$$F = x^2y^2 + ax^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f,$$

где a и b равны 0 или ± 1 .

Если минимум биквадратичной функции равен нулю, ее каноническая форма тоже обладает этим свойством.

Заметим, что задача нахождения минимума функции F равносильна задаче нахождения значения $f = f(a, b, c, d, e)$, для которого $\min F = 0$.

Предложение 2. Легко убедиться, что

- $f(-1, b, c, d, e)$ и $f(a, -1, c, d, e)$ не существуют;
- для существования конечного $f(0, b, c, d, e)$ необходимо $d = 0$ и для существования конечного $f(a, 0, c, d, e)$ необходимо $e = 0$;
- $f(0, 0, c, 0, 0) = c^2$;
- $f(1, 0, 0, 0, 0) = f(0, 1, 0, 0, 0) = 0$;
- $f(1, 0, c, d, 0) = c^2 + d^2$, если $d \neq 0$, и $f(0, 1, c, 0, e) = c^2 + e^2$, если $e \neq 0$;
- $f(1, 0, c, 0, 0)$ и $f(0, 1, c, 0, 0)$ в случае $c \neq 0$ не существуют.

Далее $a = b = 1$, то есть биквадратичная функция имеет вид

$$F = x^2y^2 + x^2 + y^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f.$$

Пусть $f(c, d, e) = f(1, 1, c, d, e)$. Поскольку замена переменных не меняет минимум функции, то справедливо

Предложение 3. Имеют место равенства

$$f(c, d, e) = f(-c, -d, e) = f(c, -d, -e) = f(-c, d, -e) = f(c, e, d).$$

Пример 1. Пусть $c = -de$.

Так как каждая из билинейных функций в правой части равенства

$$\begin{aligned}F &= x^2y^2 + x^2 + y^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f = \\ &= (xy + c)^2 + (x + d)^2 + (y + e)^2 + f - c^2 - d^2 - e^2\end{aligned}$$

обращается в ноль в точке $(-d, -e)$, то $\min F = f - c^2 - d^2 - e^2$ и

$$f(-de, d, e) = c^2 + d^2 + e^2.$$

В общем случае, если F представимо в виде суммы трех квадратов билинейных функций, принимающих нулевое значение в некоторой общей точке (p, q) , то наименьшее значение F равно нулю.

Теорема 2. Если минимум биквадратичной функции

$$F = x^2y^2 + x^2 + y^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f,$$

где $d \neq \pm e$, равен нулю, то она представима в виде суммы трех квадратов билинейных функций, равных нулю в общей точке (p, q) :

$$F = \sum_{i=1}^3 (\alpha_i xy + \beta_i x + \gamma_i y - (\alpha_i pq + \beta_i p + \gamma_i q))^2, \quad (4)$$

где p — корень уравнения

$$p^5 + dp^4 + 2p^3 + (ce + 2d)p^2 + (1 - c^2 + e^2)p + (d - ce) = 0,$$

удовлетворяющий системе неравенств

$$\begin{cases} p^2 + ep + 1 - c \geq 0 \\ p^2 - ep + 1 + c \geq 0 \end{cases}$$

(такой корень обязательно существует),

$$q = -\frac{e + cp}{1 + p^2}.$$

Значение свободного члена f , при котором $\min F = 0$,

$$f = 3p^2q^2 + p^2 + q^2 + 2cprq.$$

Доказательство. Существование представления (4) равносильно существованию решения системы

$$\begin{cases} \alpha^2 = 1 \\ \beta^2 = 1 \\ \gamma^2 = 1 \\ \delta^2 = f \\ \alpha\beta = 0 \\ \alpha\gamma = 0 \\ \beta\delta = -d \\ \gamma\delta = -e \\ \alpha\delta - \beta\gamma = -c, \end{cases} \quad (5)$$

где α, β, γ — векторы строк коэффициентов, $\delta = pqa + p\beta + q\gamma$.

Следовательно, для нахождения представления (4) необходимо и достаточно найти числа p и q и векторы $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1$, $\alpha \perp \beta$, $\alpha \perp \gamma$, $\delta = pqa + p\beta + q\gamma$ такие, что

$$\begin{cases} \beta\delta = -d \\ \gamma\delta = -e \\ \alpha\delta - \beta\gamma = -c. \end{cases} \quad (6)$$

В этом случае $f(c, d, e) = \delta^2$.

Если решение системы (6) существует, то $\alpha\delta = \alpha(pq\alpha + p\beta + q\gamma) = pq$ и, следовательно, $\beta\gamma = \alpha\delta + c = pq + c$. Причем так как $|\beta\gamma| \leq 1$, то $|pq + c| \leq 1$. Поэтому

$$\begin{aligned} -d &= \beta\delta = \beta(pq\alpha + p\beta + q\gamma) = p + q\beta\gamma = p + q(pq + c) = p + cq + pq^2, \\ -e &= \gamma\delta = \gamma(pq\alpha + p\beta + q\gamma) = p\beta\gamma + q = p(pq + c) + q = q + cp + p^2q. \end{aligned}$$

Таким образом, следствием системы (6) является система

$$\begin{cases} p + cq + pq^2 = -d \\ q + cp + p^2q = -e \\ |pq + c| \leq 1. \end{cases}$$

Выразив из второго уравнения q , подставим в первое:

$$\begin{cases} p^5 + dp^4 + 2p^3 + (ce + 2d)p^2 + (1 - c^2 + e^2)p + (d - ce) = 0 \\ q = -\frac{e+cp}{1+p^2} \\ |pq + c| \leq 1. \end{cases}$$

Далее,

$$\begin{aligned} |c + pq| \leq 1 &\iff \left| c - p \frac{e + cp}{1 + p^2} \right| \leq 1 \iff |c - ep| \leq 1 + p^2 \iff \\ &\begin{cases} p^2 + ep + 1 - c \geq 0 \\ p^2 - ep + 1 + c \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

Таким образом, для нахождения представления (4) необходимо найти корень p уравнения

$$p^5 + dp^4 + 2p^3 + (ce + 2d)p^2 + (1 - c^2 + e^2)p + (d - ce) = 0, \quad (8)$$

удовлетворяющий системе неравенств (7).

Обратно, если существует такой корень p , то для $q = -\frac{e+cp}{1+p^2}$ выполнено $|c + pq| \leq 1$. Следовательно, существуют единичные векторы α, β, γ такие, что $\alpha \perp \beta$, $\alpha \perp \gamma$ и $\beta\gamma = c + pq$. Значит, выполнены равенства (5) и существует представление (4).

Заметим, что неравенства (7) получаются друг из друга одновременной сменой знака e и c , а уравнение (8) инвариантно относительно такой замены.

В случае $|c| \leq 1 - \frac{e^2}{4}$ каждое из неравенств выполнено для всех p , $\lim_{p \rightarrow \pm\infty} G(p) = \pm\infty$, следовательно, искомым корень существует.

Если $c > 1 - \frac{e^2}{4}$, то первое неравенство эквивалентно условию

$$p \in (-\infty, p_1] \cup [p_2, +\infty),$$

где $p_1 \neq p_2$ — корни уравнения $p^2 + ep + 1 - c = 0$.

Значения в точках $p_{1,2}$ многочлена

$$G(p) = p^5 + dp^4 + 2p^3 + (ce + 2d)p^2 + (1 - c^2 + e^2)p + (d - ce)$$

равны значениям в этих точках остатка $g_1(p)$ от деления $G(p)$ на многочлен $p^2 + ep + 1 - c$. Находим

$$g_1(p) = (d - e)(-(2ec + e^3)p + c^2 + ce^2 - e^2)$$

и, пользуясь теоремой Виета, получаем

$$g_1(p_1)g_1(p_2) = (d - e)^2(c^2 + e^2)^2.$$

Случай $d = e$ рассматривается в [1].

В случае $c = e = 0$

$$F = x^2 y^2 + x^2 + y^2 + 2dx + f = (xy)^2 + (x + d)^2 + y^2 + f - d^2;$$

таким образом, F — сумма трех квадратов с общим нулем в точке $(-d, 0)$, $f = d^2$.

Для $c^2 + e^2 > 0$, $d \neq e$ получаем, что $G(p_1)G(p_2) = g_1(p_1)g_1(p_2) > 0$. Значит, для $c > 1 - \frac{e^2}{4}$ существует корень $G(p)$, удовлетворяющий первому неравенству.

Аналогично, если $-c > 1 - \frac{e^2}{4}$, то второе неравенство эквивалентно условию

$$p \in (-\infty, p_3) \cup (p_4, +\infty),$$

где $p_3 \neq p_4$ — корни уравнения $p^2 - ep + 1 + c = 0$.

Значения в точках $p_{3,4}$ многочлена $G(p)$ равны значениям в этих точках остатка

$$g_2(p) = (d + e)(-(2ec - e^3)p + c^2 - ce^2 - e^2)$$

от деления $G(p)$ на $p^2 - ep + 1 + c$. По теореме Виета получаем

$$g_2(p_3)g_2(p_4) = (d + e)^2(c^2 + e^2)^2.$$

Случай $d = -e$ следует, согласно свойствам $f(c, d, e)$, из случая $d = e$. Для $c^2 + e^2 > 0$, $d \neq -e$ получаем, что $G(p_3)G(p_4) = g_2(p_3)g_2(p_4) > 0$. Значит, для $-c > 1 - \frac{e^2}{4}$ существует корень $G(p)$, удовлетворяющий второму неравенству.

Таким образом, для $-|c| \leq 1 - \frac{e^2}{4} \leq |c|$ существует корень уравнения (8), удовлетворяющий одному из неравенств (7), а другое неравенство верно для всех p .

Осталось рассмотреть случай $1 - \frac{e^2}{4} \leq -|c|$.

Заметим, что

$$(p_1, p_2) \cap (p_3, p_4) = \emptyset.$$

Действительно, если $p_0 \in (p_1, p_2) \cap (p_3, p_4)$, то

$$\begin{cases} p_0^2 + ep_0 + 1 - c < 0 \\ p_0^2 - ep_0 + 1 + c < 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$p_0^2 + ep_0 + 1 - c < 0 < -p_0^2 + ep_0 - 1 - c$$

и

$$2p_0^2 + 2 < 0.$$

Таким образом, в случае $1 - \frac{e^2}{4} \leq -|c|$ системе неравенств (7) удовлетворяют все точки прямой за исключением двух непересекающихся интервалов (p_1, p_2) и (p_3, p_4) .

Так как $G(p_1)G(p_2) > 0$, $G(p_3)G(p_4) > 0$ и $\lim_{p \rightarrow \pm\infty} G(p) = \pm\infty$, то искомым корнем p уравнения (8) существует, причем

- $p < \min p_i$, если все $G(p_i) > 0$,
- $p > \max p_i$, если все $G(p_i) < 0$,
- p лежит в промежутке между интервалами (p_1, p_2) и (p_3, p_4) , если имеются два плюса и два минуса.

Итак, корень уравнения (8), удовлетворяющий системе неравенств (7), всегда существует, что означает существование представления (4) биквадратичной функции в виде суммы трех квадратов с общим нулем.

Так как $f = \delta^2$, $\delta = pq\alpha + p\beta + q\gamma$, то

$$f = (pq\alpha + p\beta + q\gamma)^2 = p^2q^2 + p^2 + q^2 + 2pq(pq + c) = 3p^2q^2 + p^2 + q^2 + 2pqc.$$

Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Кадочникова А. В.* Условия неотрицательности биквадратичной функции : дис. ... магистра математики / Иван. гос. ун-т. Иваново, 2017. 33 с.
2. *Митрофанова М. К.* Каноническая форма биквадратного многочлена : дипломная работа / Иван. гос. ун-т. Иваново, 2005. 100 с.

Сведения об авторах

БАРИНОВ
Сергей Николаевич кандидат биологических наук,
студент 1 курса магистратуры
биолого-химического факультета,
Ивановский государственный университет.
barinowsergei@mail.ru

БАРИНОВА
Марина Олеговна кандидат биологических наук,
доцент кафедры общей биологии
и физиологии,
Ивановский государственный университет.
nauka@list.ru

БОРИСОВА
Елена Анатольевна доктор биологических наук,
профессор, заведующая кафедрой
общей биологии и физиологии,
Ивановский государственный университет.
floraea@mail.ru

БОРИСОВА
Ирина Николаевна директор ботанического сада,
Ивановский государственный университет.
i371159@mail.ru

ВАГАНОВ
Сергей Евгеньевич аспирант кафедры прикладной математики
и компьютерных наук,
Ивановский государственный университет.
pro100-pioner@mail.ru

ЗАРИПОВ
Владимир Николаевич кандидат биологических наук,
доцент кафедры общей биологии и физиологии,
Ивановский государственный университет.
zaripow@mail.ru

ИСАЕВ
Владимир Анатольевич доктор биологических наук, профессор
кафедры общей биологии и физиологии,
Ивановский государственный университет.
viam_e@mail.ru

КИЛЬДЮШОВА
Светлана Сергеевна студентка 4 курса
биолого-химического факультета, бакалавриат,
Ивановский государственный университет.
www.tuyp@yandex.ru

КОРОЛЕВА
Светлана Валерьевна доктор медицинских наук, профессор кафедры
гражданской защиты и управления в ЧС,
Ивановская пожарно-спасательная академия
ГПС МЧС России.
drqween@mail.ru

- КРЕМЕШКОВА** студентка бакалавриата
Юлия Алексеевна факультета математики и компьютерных наук,
Ивановский государственный университет.
kr-yu@mail.ru
- КРЫЛОВ** доктор химических наук, профессор
Евгений Николаевич кафедры органической и физической химии,
Ивановский государственный университет.
enk2000S@yandex.ru
- МЕЛЬНИКОВ** кандидат биологических наук,
Владимир Николаевич доцент кафедры ботаники и зоологии,
Ивановский государственный университет.
ivanovobirds@mail.ru
- МИНЕЕВА** кандидат педагогических наук, доцент,
Лариса Юрьевна заведующая кафедрой ботаники и зоологии,
Ивановский государственный университет.
lmin1@mail.ru
- МОЛДАВАНСКИЙ** доктор физико-математических наук,
Давид Ионович профессор Межвузовского центра
гуманитарного образования,
Ивановский государственный университет.
moldav@mail.ru
- ПУХОВ** кандидат физико-математических наук,
Сергей Владимирович профессор кафедры прикладной математики
и компьютерных наук,
Ивановский государственный университет.
spuhov@gmail.com
- СОКОЛОВ** кандидат физико-математических наук, доцент,
Евгений Викторович заведующий кафедрой прикладной математики
и компьютерных наук,
Ивановский государственный университет.
ev-sokolov@yandex.ru
- СТЕПАНОВА** агроном ботанического сада,
Наталья Николаевна Ивановский государственный университет.
natasha_okharkina@inbox.ru
- ТИХОМИРОВА** студентка 2 курса магистратуры
Наталья Геннадьевна биолого-химического факультета,
Ивановский государственный университет.
natalya_tihomirova09.01@mail.ru
- ТУМАНОВА** кандидат физико-математических наук,
Елена Александровна доцент кафедры прикладной математики
и компьютерных наук,
Ивановский государственный университет.
helenfog@bk.ru

- ХАШИН**
Сергей Иванович кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры прикладной математики
и компьютерных наук,
Ивановский государственный университет.
khash2@mail.ru
- ХАШИНА**
Юлия Анатольевна кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры математического анализа
и геометрии, Ивановский государственный
университет.
khashina_julia@mail.ru
- ЦВЕТКОВА**
Дарья Владиславовна студентка 5 курса биолого-химического
факультета, специалитет,
Ивановский государственный университет.
dasacdv3112@inbox.ru
- ЧЕКАН**
Ирина Валерьевна ведущий инженер ботанического сада,
Ивановский государственный университет.
(4932) 33-64-52
- ЧУДНЕНКО**
Дмитрий Евгеньевич кандидат биологических наук,
доцент кафедры ботаники и зоологии,
Ивановский государственный университет.
ivanovobirds@mail.ru

ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ АВТОРОВ

«ВЕСТНИКА ИВАНОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА»

1. В журнал принимаются материалы в электронном виде на дискете стандартного формата с приложением одного экземпляра распечатки на белой бумаге.

Максимальный размер статьи — 1,0 авт. л. (20 страниц текста через 1,5 интервала, 30 строк на странице формата А4, не более 65 знаков в строке, выполненного в редакторе Microsoft Word шрифтом Times New Roman или Times New Roman Cyr, кегль 14), сообщения — 0,5 авт. л. (10 страниц).

2. Материал для журнала должен быть оформлен в следующей последовательности: **УДК** (для естественных и технических специальностей), **ББК** (в библиографическом отделе библиотеки ИвГУ); на русском и английском языках: **инициалы и фамилия автора, название материала**, для научных статей — **аннотация** (объемом 10—15 строк), **ключевые слова; текст статьи** (сообщения).

3. Библиографические источники должны быть пронумерованы в алфавитном порядке, ссылки даются в тексте статьи в скобках в строгом соответствии с пристатейным списком литературы. Библиографическое описание литературных источников к статье оформляется в соответствии с ГОСТами 7.1—2003, 7.0.5—2008. В каждом пункте библиографического списка, составленного в алфавитном порядке (сначала произведения на русском языке, затем на иностранном), приводится одна работа. В выходных сведениях обязательно указание издательства и количества страниц, в ссылке на электронный ресурс — даты обращения.

4. Фотографии, прилагаемые к статье, должны быть черно-белыми, контрастными, рисунки — четкими.

5. В конце представленных материалов следует указать полный почтовый адрес автора, его телефон, фамилию, имя, отчество, ученую степень, звание, должность. Материал должен быть подписан всеми авторами.

6. Направление в редакцию ранее опубликованных и принятых к печати в других изданиях работ не допускается.

7. Редакция оставляет за собой право осуществлять литературную правку, корректирование и сокращение текстов статей.

8. Рукописи аспирантов публикуются бесплатно.

ПРАВИЛА РЕЦЕНЗИРОВАНИЯ СТАТЕЙ

1. Статьи авторов, являющихся преподавателями, сотрудниками или обучающимися ИвГУ, принимаются редакционной коллегией соответствующей серии (выпуска) на основании письменного решения (рекомендации) кафедры или научного подразделения ИвГУ и рецензии доктора наук, не являющегося научным руководителем (консультантом), руководителем или сотрудником кафедры или подразделения, где работает автор.

2. Статьи авторов, не работающих и не обучающихся в ИвГУ, принимаются редакционной коллегией соответствующей серии (выпуска) на основании рекомендации их вуза или научного учреждения и рецензии доктора наук, работающего в ИвГУ.

3. Поступившие статьи проходят далее рецензирование одного из членов редколлегии соответствующей серии (выпуска), являющегося специалистом в данной области.

4. Статья принимается к публикации при наличии двух положительных рецензий и положительного решения редколлегии серии (выпуска). Порядок и очередность публикации статьи определяются в зависимости от объема публикуемых материалов и тематики выпуска.

5. В случае отклонения статьи автору направляется аргументированный отказ в письменной (электронной) форме. Авторы имеют право на доработку статьи или ее замену другим материалом.

**ВЕСТНИК
ИВАНОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА**

**Серия «Естественные, общественные науки»
2017. Вып. 2. Биология. Химия. Физика. Математика**

Директор издательства *Л. В. Михеева*
Редакторы *О. В. Батова, О. В. Боронина, В. А. Киселева*
Технический редактор *И. С. Сибирева*
Компьютерная верстка *Т. Б. Земсковой*

Дата выхода в свет 30.09.2017 г.
Формат $70 \times 108^{1/16}$. Бумага писчая. Печать плоская.
Усл. печ. л. 9,45. Уч.-изд. л. 6,5. Тираж 300 экз. Заказ № 184.

Издательство «Ивановский государственный университет»
✉ 153025 Иваново, ул. Ермака, 39
☎ (4932) 93-43-41. E-mail: publisher@ivanovo.ac.ru

