



Программа аспирантуры  
научная специальность  
1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

**ИВАНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

Кафедра фундаментальной математики

ОДОБРЕНО:

Руководитель ОП

\_\_\_\_\_  
(подпись) Е.В. Соколов

«30» августа 2024 г.

**Рабочая программа дисциплины**

Финитная аппроксимируемость групп и ее обобщения

Уровень высшего образования:

Подготовка кадров высшей квалификации

Научная специальность:

1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Направленность образовательной программы:

Срок освоения образовательной программы и форма обучения:

4 года (очная форма)

Иваново



### 1. Цели освоения дисциплины

-получение аспирантами глубоких знаний по следующему направлению современной теории групп: аппроксимационные свойства некоторых классов групп и свободных конструкций (финитная аппроксимируемость, финитная аппроксимируемость относительно сопряженности, финитная отделимость подгрупп, хопфовость, аппроксимируемость конечными  $p$ -группами;

-постановка перед аспирантами научных проблем и создание базы для дальнейших научных исследований по указанным выше направлениям теории групп;

-формирование у аспирантов высокого уровня математической культуры и интуиции, в том числе способности к критическому восприятию и творческому воспроизведению известных математических результатов, а также способности к самостоятельным абстрактным математическим рассуждениям в области современной теории групп;

-формирование у аспирантов навыков научно-исследовательской работы (способности самостоятельно доказывать известные и новые утверждения, выдвигать гипотезы, подтверждать или опровергать их, способности порождать новые идеи и получать новые научные результаты в области современной теории групп).

### 2. Место дисциплины в структуре ОП

Данная дисциплина является дисциплиной по выбору (ДВ.2.1). Для ее успешного изучения необходимы «входные» знания в области общей теории групп.

Для освоения данной дисциплины обучающийся должен:

-знать основы теории групп и комбинаторной теории групп,

-уметь работать с абстрактными алгебраическими системами,

-владеть высоким уровнем математической культуры и интуиции.

Содержание дисциплины является основой научной работы аспирантов, занимающихся изучением аппроксимационных свойств групп, и способствует научной работе аспирантов в рамках написания диссертационных работ по этому направлению. На этой дисциплине основаны научно-исследовательская деятельность аспиранта и подготовка научно-квалификационной работы (диссертации) на соискание ученой степени кандидата наук.

### 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

**Знать:** современные результаты и проблематику по тем направлениям теории групп, которые занимают изучением аппроксимационных свойств групп и свободных конструкций (эти знания лежат в основе всех перечисленных выше компетенций).

**Уметь:** восстанавливать, воспроизводить и творчески перерабатывать доказательства классических и современных теорем теории групп и комбинаторной теории групп, которые связаны с изучением аппроксимационных свойств, самостоятельно рассуждать и решать научные задачи в указанной выше области, обосновывать или опровергать научные гипотезы, выдвигать научные гипотезы, вести научную дискуссию, развивать свою математическую интуицию на основе глубоких знаний современной алгебры, проводить самостоятельные научные исследования, порождать новые научные идеи на основе глубоких знаний и математической интуиции, реализовывать свои идеи в виде научных результатов, уметь публично представлять научные результаты, быть готовым к критическому анализу известных результатов в сфере своих научных интересов.

**Владеть:** навыками работы с абстрактными алгебраическими системами, навыками научно-исследовательской работы в сфере своих научных интересов, высоким уровнем математической культуры и интуиции, навыками перехода от интуитивных научных идей к их четкому и ясному изложению в надлежащем виде – в виде научных публикаций, технологиями поиска информации



Программа аспирантуры  
научная специальность

1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

с помощью сетевых ресурсов, владеть навыками преподавательской работы в части, касающейся умения публично представлять и разъяснять тот или иной математический материал.

**4. Объем и содержание дисциплины**

Объем дисциплины составляет 2 зачетные единицы (72 академических часа).

**4.1. Содержание дисциплины по разделам (темам), соотнесенное с видами и трудоемкостью занятий лекционно-семинарского типа**

№ п/п	Разделы (темы) дисциплины	Семестр	Виды занятий, их объем (в ак.часах, по очной форме обучения)		Формы текущего контроля успеваемости (по очной форме обучения)
			Занятия лекцион- ного типа	Занятия семинар- ского типа	Формы промежуточной аттестации
1	Финитно аппроксимируемые групп				
1.1	Определение и простые свойства финитно аппроксимируемых групп	3	1	1	
1.2	Финитная аппроксимируемость и подгруппы конечного индекса	3	1	0	
1.3	Финитная аппроксимируемость групп автоморфизмов	3	0	1	
1.4	Финитная аппроксимируемость расщепляемых расширений групп	3	1	1	
1.5	Аппроксимируемость конечными p-группами	3	1	0	
1.6	Финитная отделимость и отделимость в классе конечных p-групп	3	0	1	
1.7	Финитная аппроксимируемость относительно сопряженности и хопфовость	3	1	1	
2	Свободные конструкции групп				
2.1	Определяющие соотношения в группе	3	1	0	
2.2	Свободные группы и их аппроксимационные свойства	3	0	1	
2.3	Свободные произведения групп и их аппроксимационные свойства	3	1	1	
2.4	Свободные произведения групп с объединенной подгруппой	3	1	0	
2.5	HNN-расширения групп	3	0	1	
2.6	Финитная аппроксимируемость свободных произведений групп с объединенной подгруппой	3	1	1	
2.7	Аппроксимируемость	3	1	=	



Программа аспирантуры  
научная специальность

1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

	конечными $p$ -группами свободных произведений групп с объединенной подгруппой				
2.8	Финитная аппроксимируемость HNN-расширений	3	=	1	
Итого за 3-й семестр			10	10	Зачет с оценкой
Итого по дисциплине			10	10	

#### 4.2. Развернутое описание содержания дисциплины по разделам (темам)

##### Раздел 1. Финитная аппроксимируемость групп

###### Тема 1.1. Определение и простые свойства финитно аппроксимируемых групп.

Определение финитно аппроксимируемой группы на языке гомоморфизмов. Финитная аппроксимируемость группы целых чисел и групп целочисленных матриц. Замкнутость класса всех финитно аппроксимируемых групп относительно подгрупп, прямых и декартовых произведений. Финитная аппроксимируемость конечно порожденной абелевой группы. Отсутствие неединичных полных элементов в группе как необходимое условие ее финитной аппроксимируемости. Отсутствие неединичных полных элементов в абелевой группе как необходимое и достаточное условие ее финитной аппроксимируемости (теорема Мальцева). Финитная аппроксимируемость мультипликативной группы рациональных чисел и любой собственной подгруппы аддитивной группы рациональных чисел.

**Тема 1.2. Финитная аппроксимируемость и подгруппы конечного индекса.** Свойство транзитивности для подгрупп конечного индекса. Теорема Пуанкаре. Пересечение всех подгрупп данной группы, сопряженных с фиксированной подгруппой конечного индекса, как нормальная подгруппа конечного индекса. Финитно аппроксимируемые группы как группы в которых тривиально пересечение всех подгрупп конечного индекса. Замкнутость класса всех финитно аппроксимируемых групп относительно конечных расширений. Финитно аппроксимируемые группы как подгруппы декартовых произведений конечных групп.

**Тема 1.3. Финитная аппроксимируемость групп автоморфизмов.** Группы автоморфизмов групп и характеристические подгруппы. Гомоморфизм индуцирования группы автоморфизмов группы  $G$  в группу автоморфизмов фактор-группы группы  $G$  по ее характеристической подгруппе. Пересечение всех подгрупп фиксированного конечного индекса конечно порожденной группы как характеристическая подгруппа конечного индекса. Пример финитно аппроксимируемой группы, группа автоморфизмов которой не является финитно аппроксимируемой. Теорема Смирнова – Баумслага о финитной аппроксимируемости группы автоморфизмов конечно порожденной финитно аппроксимируемой группы. Обобщение теоремы Смирнова - Баумслага.

**Тема 1.4. Финитная аппроксимируемость расщепляемых расширений групп.** Пример расщепляемого расширения финитно аппроксимируемой группы с помощью финитно аппроксимируемой группы, не являющегося финитно аппроксимируемой группой. Теорема Мальцева о финитной аппроксимируемости расщепляемого расширения конечно порожденной финитно аппроксимируемой группы с помощью финитно аппроксимируемой группы и ее обобщение. Теорема Гирша о финитной аппроксимируемости полициклической группы как следствие из теоремы Мальцева.

**Тема 1.5. Аппроксимируемость конечными  $p$ -группами.** Различные определения группы, аппроксимируемой конечными  $p$ -группами. Замкнутость класса всех групп, аппроксимируемых конечными  $p$ -группами, относительно подгрупп, прямых и декартовых произведений и расширений с помощью конечных  $p$ -групп. Отсутствие в группе  $p'$ -крючения как



необходимое условие ее аппроксимируемости конечными  $p$ -группами. Достаточность этого условия в случае конечно порожденной нильпотентной группы и как следствие теорема Грюнберга об аппроксимируемости конечными  $p$ -группами конечно порожденной нильпотентной группы без кручения. Критерий аппроксимируемости конечными  $p$ -группами сверхразрешимой группы.

**Тема 1.6. Финитная отделимость и отделимость в классе конечных  $p$ -групп.** Различные определения финитно отделимого подмножества и финитно отделимой подгруппы. Финитная отделимость конечного подмножества финитно аппроксимируемой группы. Равносильность финитной отделимости нормальной подгруппы и финитной аппроксимируемости соответствующей фактор-группы. Теоремы о финитной отделимости подгрупп в конечных и расщепляемых расширениях. Финитная отделимость всех подгрупп в полициклических группах. Отделимость подгрупп в классе конечных  $p$ -групп и  $p$ -аналоги некоторых теорем о финитной отделимости. Подгруппы конечно порожденной нильпотентной группы, отделимые в классе конечных  $p$ -групп.

**Тема 1.7. Финитная аппроксимируемость относительно сопряженности и хопфовость.** Понятие финитной аппроксимируемости относительно сопряженности и его  $p$ -аналог. Теорема Каргаполова о финитной аппроксимируемости относительно сопряженности сверхразрешимых групп. Критерий аппроксимируемости конечными  $p$ -группами относительно сопряженности для сверхразрешимой группы. Хопфовы группы. Теорема Мальцева о хопфовости конечно порожденной финитно аппроксимируемой группы.

## Раздел 2. Свободные конструкции групп

**Тема 2.1. Определяющие соотношения в группе.** Задание группы порождающими символами и определяющими соотношениями. Проблема равенства слов. Теорема Мальцева о разрешимости проблемы равенства в конечно определенной финитно аппроксимируемой группе.

**Тема 2.2. Свободные группы и их аппроксимационные свойства.** Различные определения свободной группы. Несократимая запись элемента свободной группы. Теорема Шрейера о подгруппах свободной группы. Свойства финитной аппроксимируемости, финитной аппроксимируемости относительно сопряженности и аппроксимируемости конечными  $p$ -группами для свободной группы. Аппроксимируемость свободной группы произвольным корневым классом групп. Финитная отделимость конечно порожденных подгрупп свободной группы. Характеризация циклических подгрупп свободной группы, отделимых в классе конечных  $p$ -групп.

**Тема 2.3. Свободные произведения групп и их аппроксимируемость корневыми классами.** Различные определения свободного произведения групп. Несократимая запись элемента свободного произведения групп. Теорема Куроша о подгруппах свободного произведения групп. Декартова подгруппа свободного произведения. Теорема Грюнберга об аппроксимируемости корневым классом групп свободного произведения групп, аппроксимируемых этим классом.

**Тема 2.4. Свободные произведения групп с объединенной подгруппой.** Различные определения свободного произведения групп с объединенной подгруппой. Вложимость свободных сомножителей в свободное произведение групп с объединенной подгруппой. Существование гомоморфизма свободного произведения групп  $A$  и  $B$  с объединенной подгруппой в группу преобразований множества  $A \times B$ , инъективного на свободных множителях. Несократимая запись элемента свободного произведения групп с объединенной подгруппой, неравенство единице любого элемента, несократимая запись которого содержит более одного слога. Теоремы Х. Неймана о подгруппах свободного произведения групп с объединенной подгруппой.



**Тема 2.5.  $HNN$ -расширения групп.** Определение  $HNN$ -расширения. Вложимость базовой группы в  $HNN$ -расширение. Существование гомоморфизма  $HNN$ -расширения конечной группы  $G$  в группу преобразований группы  $G$ , инъективного на базовой подгруппе. Приведенная запись элемента  $HNN$ -расширения. Лемма Бриттона.

**Тема 2.6. Финитная аппроксимируемость свободных произведений групп с объединенной подгруппой.** Пример свободного произведения с объединенной подгруппой двух финитно аппроксимируемых групп, которое не является финитно аппроксимируемой группой. Теорема Г. Баумслага о финитной аппроксимируемости свободного произведения двух конечных групп с объединенной подгруппой. Совместимые подгруппы в свободных множителях свободного произведения групп с объединенной подгруппой. Фильтрационная теорема Г. Баумслага для свободного произведения двух групп с объединенной подгруппой. Условия обратимости фильтрационной теоремы Г. Баумслага. Финитная аппроксимируемость свободного произведения двух финитно аппроксимируемых групп с конечной объединенной подгруппой. Финитная аппроксимируемость свободного произведения двух конечно порожденных абелевых групп с объединенной подгруппой. Теорема Г. Баумслага о финитной аппроксимируемости свободного произведения двух конечно порожденных нильпотентных групп с циклической объединенной подгруппой. Теорема Г. Баумслага о финитной аппроксимируемости свободного произведения двух свободных групп с циклической объединенной подгруппой.

**Тема 2.7. Аппроксимируемость конечными  $p$ -группами свободных произведений групп с объединенной подгруппой.** Пример свободного произведения с объединенной подгруппой двух конечных  $p$ -групп, которое не аппроксимируемо конечными  $p$ -группами. Критерий Хигмена аппроксимируемости конечными  $p$ -группами свободного произведения с объединенной подгруппой двух конечных  $p$ -групп и  $p$ -аналоги отмеченных выше теорем о финитной аппроксимируемости свободного произведения двух групп с объединенной подгруппой.

**Тема 2.8. Финитная аппроксимируемость  $HNN$ -расширений.** Финитная аппроксимируемость  $HNN$ -расширения конечной группы. Совместимые подгруппы в базе  $HNN$ -расширения. Фильтрационная теорема для  $HNN$ -расширений. Финитная аппроксимируемость  $HNN$ -расширения финитно аппроксимируемой группы с конечными связанными подгруппами. Критерий финитной аппроксимируемости нисходящих  $HNN$ -расширений. Критерий финитной аппроксимируемости групп Баумслага – Солитэра. Некоторые  $p$ -аналоги отмеченных выше теорем о финитной аппроксимируемости  $HNN$ -расширений.

## 5. Образовательные технологии

Технология проблемного обучения – демонстрация на лекциях и практических занятиях проблемных ситуаций. Рассматриваются некоторые недавно решенные научные проблемы, а также открытые проблемы теории групп. Проблемы учебного характера как правило формулируются в виде задач и решаются аспирантами самостоятельно и на практических занятиях под руководством и при поддержке преподавателя. Решение каждой задачи должно иметь четкую логическую структуру, содержать необходимые доказательства, пояснения, комментарии, ссылки на теоретические факты.

Информационные технологии: технологии смешанного обучения, использование компьютерных презентаций, обеспечение студентов текстами лекций в электронной форме.

## 6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа аспирантов состоит в следующем: еженедельная работа с рукописными и электронными конспектами лекций (материалы выдаются аспирантам по мере необходимости), изучение литературы указанной в разделе 8 рабочей программы, выполнение



домашних заданий (задания выдаются на каждом практическом занятии, и, при необходимости, в системе электронной поддержки образовательного процесса «Мой университет» <https://uni.ivanovo.ac.ru>), выполнение домашних контрольных работ творческого характера (разработаны подробные методические указания по их выполнению), подготовка к зачету (вопросы и другие материалы для сдачи зачета доступны каждому аспиранту как в бумажном виде (в ауд. 326 первого уч. корпуса) так и в системе «Мой университет»). Методические пособия по данному курсу находятся в библиотечных фондах ИвГУ, их выходные данные представлены в **приложениях** к рабочей программе. Там же представлены и другие методические материалы по данной дисциплине.

## **7. Характеристика оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине**

Итоговый контроль: устный зачет с оценкой. Цель: подведение итогов освоения аспирантами данной дисциплины. Вопросы к зачету приведены в приложениях. Оценивание уровня подготовки аспиранта проводится в форме научного обсуждения, предметом которого являются вопросы современной алгебры и научные результаты аспиранта. Учитываются также результаты выполнения домашнего задания творческого характера, которое соответствует тематике НИР аспиранта.

Для получения оценки «удовлетворительно» необходимо знание основных понятий и классических результатов теории групп, теории финитной аппроксимируемости групп, современных направлений и проблематики тех разделов алгебры, которые входят в сферу научных интересов аспиранта.

Для получения оценки «хорошо» наряду с перечисленным выше необходимо уметь воспроизводить и творчески перерабатывать доказательства классических и современных теорем теории групп и комбинаторной теории групп.

Для получения оценки «отлично» необходимо наряду с перечисленным выше выполнить задание творческого характера, связанное с доказательствами новых нетривиальных алгебраических теорем.

Задания творческого характера даются аспиранту за несколько недель до зачета в качестве домашней работы. Задание связано с изучением результатов конкретной научной статьи по теории групп и получением более сильных (или более общих) результатов. Задание представляет собой «разветвленную» систему связанных между собой задач, которые в совокупности приводят к получению требуемого нового научного результата. Задание проверяется непосредственно на зачете. Демонстрационные версии такого задания приведены в приложении 1.

## **8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

Основная литература:

1. Кострикин, А.И. Введение в алгебру : учебник / А.И. Кострикин. - М. : МЦНМО, 2009. - Ч. 1. Основы алгебры. - 273 с. - ISBN 978-5-94057-453-8 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63140>

2. Кострикин, А.И. Введение в алгебру : учебник / А.И. Кострикин. - М. : МЦНМО, 2009. - Ч. 2. Линейная алгебра. - 368 с. - ISBN 978-5-94057-454-5 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63144>

3. Кострикин, А.И. Введение в алгебру : учебник / А.И. Кострикин. - М. : МЦНМО, 2009. - Ч. 3. Основные структуры алгебры. - 272 с. - ISBN 978-5-94057-455-2 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=62951>



4. Курош, Александр Геннадиевич. Теория групп / А. Г. Курош .— М. : Физматлит, 2011 .— 805 с .— (Классика и современность. Математика) .— ISBN 978-5-9221-1349-6.

Дополнительная литература:

1. Сборник задач по алгебре : задачник / под ред. А.И. Кострикин. - М. : МЦНМО, 2009. - 404 с. - ISBN 978-5-94057-413-2 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63274>

Ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

Система электронной поддержки образовательного процесса «Мой университет» <https://uni.ivanovo.ac.ru>

Общероссийский математический портал <http://www.mathnet.ru/>

Профессиональные базы данных и информационно-справочные системы:

ЭБС «Университетская библиотека онлайн» [www.biblioclub.ru](http://www.biblioclub.ru)

Электронная библиотека ИвГУ <http://lib.ivanovo.ac.ru>

Электронный каталог НБ ИвГУ <http://lib.ivanovo.ac.ru/index.php/ek>

Международные базы данных:

Web of Science.

Программное обеспечение: операционная система Microsoft Windows, пакет офисных программ Microsoft Office и(или) LibreOffice, интернет-браузер Microsoft Edge и(или) Yandex Browser, Мой университет.

## **9. Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Учебные аудитории:

- для проведения занятий лекционного типа с комплектом специализированной учебной мебели и техническими средствами обучения, служащими для предоставления учебной информации большой аудитории;

- для проведения занятий семинарского типа, консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации с комплектом специализированной учебной мебели и техническими средствами обучения;

Помещение для самостоятельной работы, оснащенное комплектом специализированной учебной мебели, компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в ЭИОС.

Демонстрационное оборудование: доска, проектор для презентаций.





Программа аспирантуры  
научная специальность

1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

---

**Автор(ы) рабочей программы дисциплины:** профессор кафедры фундаментальной математики ИвГУ, доктор физико-математических наук Азаров Дмитрий Николаевич

Программа рассмотрена и утверждена на заседании кафедры фундаментальной математики «30» августа 2024 г., протокол № 1.

Программа обновлена  
протокол заседания кафедры № \_ от « » 20 \_ г.

Согласовано:

Руководитель ОП \_\_\_\_\_  
(подпись)

Программа обновлена  
протокол заседания кафедры № \_ от « » апреля 20 \_ г.

Согласовано:

Руководитель ОП \_\_\_\_\_  
(подпись)