



Основная профессиональная образовательная программа  
02.03.01 Математика и компьютерные науки  
(Математика и компьютерные науки)

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

**ИВАНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

Кафедра алгебры и математической логики

ОДОБРЕНО:

Руководитель ОП

Н.Г. Косарев Н.Г. Косарев  
(подпись)

« 13 » июня 2018 г.

**Рабочая программа дисциплины**

Математическая логика и теория алгоритмов

Уровень высшего образования:	бакалавриат
Квалификация выпускника:	бакалавр
Направление подготовки:	02.03.01 Математика и компьютерные науки
Направленность (профиль) образовательной программы:	Математика и компьютерные науки
Тип образовательной программы:	Программа академического бакалавриата

Иваново



## 1. Цели освоения дисциплины

ОП имеет своей целью подготовку бакалавров для научно-исследовательской деятельности в областях, использующих математические методы для решения различных задач с использованием математического моделирования процессов, объектов и программного обеспечения; для разработки эффективных методов решения задач экономики и управления; для программно-информационного обеспечения научной и исследовательской деятельности.

Цели и задачи данной дисциплины определяются целями ОП и той ролью, которую играет математическая логика в современных математике и информатике. Во-первых, математическая логика – наука, лежащая в основаниях математики, и формальный язык математики. Во-вторых, быстрое развитие вычислительной техники способствует расширению как круга задач, решаемых с помощью математической логики, так и методов, применяемых для их решения. Это в первую очередь относится к задачам искусственного интеллекта, решение которых немыслимо без привлечения методов математической логики. Сказанное в полной мере относится и к теории алгоритмов, тесно связанной с математической логикой.

В число основных задач курса следует включить:

1. Знакомство с основными методами логических рассуждений - дедукцией, индукцией, аналогией. Рассмотрение методов решения задач логического характера.
2. Овладение формальным языком математической логики для формулирования математических утверждений.
3. Изучение классических логических исчислений - исчисления высказываний и исчисления предикатов.
4. Изучение основных свойств аксиоматических теорий и ознакомление с методами формальных доказательств в рамках этих теорий.
5. Изучение машин Тьюринга.
6. Введение в теорию линейно-ограниченных автоматов.
7. Введение в теорию рекурсивных функций.
8. Знакомство с основными понятиями теории вычислимости

## 2. Место дисциплины в структуре ОП

Учебная дисциплина «Математическая логика и теория алгоритмов» включена в вариативную часть учебного плана (Б1.В.06). Она изучается студентами на третьем курсе в 5 и 6-ом семестрах. Для ее успешного изучения необходимы «входные» знания и умения, полученные в процессе изучения дисциплин:

- фундаментальная алгебра;
- компьютерная алгебра;
- дискретная математика;
- математический анализ;
- практикум по элементарной математике.

Для освоения данной дисциплины обучающийся должен:

Знать: основные понятия алгебры, математического анализа и дискретной математики

Уметь: выполнять действия над числами, алгебраическими выражениями и функциями.

Владеть: теоретико-множественной терминологией и общематематическими методами доказательства теорем.

Список учебных дисциплин (модулей), изучение которых опирается на материал курса «Математическая логика и теория алгоритмов»:

- базы данных;
- методика преподавания математики;
- история, методология и основания математики



Основная профессиональная образовательная программа  
02.03.01 Математика и компьютерные науки  
(Математика и компьютерные науки)

- учебная практика, практика по получению первичных профессиональных умений и навыков, в том числе первичных умений и навыков в научно-исследовательской деятельности;
- производственная практика, практика по получению профессиональных умений и опыта профессиональной деятельности (научно-производственная / педагогическая);
- преддипломная практика или научно-исследовательская работа;
- подготовка и сдача государственного экзамена;
- подготовка к защите и защита выпускной квалификационной работы (бакалаврской работы).

### **3. Планируемые результаты обучения дисциплине**

#### **3.1. Компетенции, формированию которых способствует дисциплина ОПК-1; ОПК-2; ОПК-3; ПК-1; ПК-2; ПК-3; ПК-4**

При освоении дисциплины формируются следующие компетенции в соответствии с ФГОС ВО по данному направлению подготовки:

- а) общекультурные (ОК): нет
- б) общепрофессиональные (ОПК):

ОПК-1: готовностью использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в будущей профессиональной деятельности;

ОПК-2: способностью решать стандартные задачи профессиональной деятельности на основе информационной и библиографической культуры с применением информационно-коммуникационных технологий и с учетом основных требований информационной безопасности;

ОПК-3: способностью к самостоятельной научно-исследовательской работе;

- в) профессиональные (ПК):

ПК-1: способностью к определению общих форм и закономерностей отдельной предметной области;

ПК-2: способностью математически корректно ставить естественнонаучные задачи, знание постановок классических задач математики;

ПК-3: способностью строго доказывать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата;

ПК-4: способностью публично представлять собственные и известные научные результаты.

- г) дополнительные (ПКВ): нет

#### **3.2. Перечень планируемых результатов обучения дисциплине, соотнесенных с формируемыми компетенциями**

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

Знать: основные понятия: высказывание, логические связки, формулы, предикаты, операции наложения кванторов, исчисления, модели, алгоритмы, машины Тьюринга, рекурсивные функции (ОПК-1, ОПК-3, ПК-3) и классические результаты математической логики и теории алгоритмов: полнота или неполнота аксиоматической теории, разрешимость или неразрешимость алгоритмической проблемы, формализация понятия алгоритма (ПК-1, ПК-2, ПК-3, ПК-4), современные направления и проблематику тех разделов математической логики и теории алгоритмов, которые входят в сферу будущей профессиональной деятельности студента: теория конечных автоматов, теория моделей, теория вычислимости (эти знания лежат в основе всех перечисленных выше компетенций);



Основная профессиональная образовательная программа  
02.03.01 Математика и компьютерные науки  
(Математика и компьютерные науки)

Уметь: воспроизводить и творчески перерабатывать доказательства классических теорем математической логики (ОПК-3), корректно формулировать естественнонаучные задачи на языке математической логики, доказывать или опровергать математические гипотезы (ПК-3, ПК-4), развивать свою математическую интуицию на основе глубоких знаний современной алгебры и математической логики, реализовывать свои идеи в виде научных результатов и увидеть следствия полученного результата (ПК-2, ОПК-2).

Владеть: навыками работы с теориями первого порядка (ПК-1), навыками использования методов математической логики и теории алгоритмов к конкретной предметной области (ПК-2), высоким уровнем математической культуры и интуиции (ПК-3), навыками перехода от интуитивных научных идей к их четкому и ясному изложению в надлежащем виде (ОПК-1), технологиями поиска информации с помощью сетевых ресурсов (ОПК-2).

#### 4. Объем и содержание дисциплины

Объем дисциплины составляет 4 зачетных единиц (144 академических часов), в т.ч. выполнение курсовой работы – 36 академических часов.

##### 4.1. Содержание дисциплины по разделам (темам), соотнесенное с видами и трудоемкостью занятий лекционно-семинарского типа

Объем иной контактной работы и самостоятельной работы обучающегося по дисциплине указан в учебном плане образовательной программы.

№ п/п	Разделы (темы) дисциплины	Семестр	Виды занятий, их объем (в ак. часах, по очной форме обучения)		Формы текущего контроля успеваемости (по очной форме обучения)  Формы промежуточной аттестации
			Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практ. зан.)	
1.	Алгебра высказываний	5	6	6	Контрольная работа №1 «Алгебра высказываний»
2.	Исчисление высказываний	5	8	8	
3.	Релейно-контактные схемы	5	2	2	
4.	Булевы алгебры	5	6	6	
5.	Алгебра предикатов	5	4	4	Контрольная работа №2 «Алгебра предикатов»
6.	Элементы теории моделей	5	4	4	
7.	Интерпретация формул алгебры предикатов	5	6	6	
Итого за семестр:			36	32	Зачет
8.	Основы теории алгоритмов	6	8	8	Контрольная работа №3 «Машины Тьюринга и рекурсивные функции»
9.	Теория рекурсивных функций	6	8	8	
10.	Вычислимые и вычислимо перечислимые множества	6	8	8	Контрольная работа №4 «Теория вычислимости»
11.	Сводимости: по Тьюрингу и по перечислимости	6	10	6	
Итого за семестр:			34	30	Курсовая работа Экзамен
Итого по дисциплине:			70	62	



## **4.2. Развернутое описание содержания дисциплины по разделам (темам)**

### **5 семестр**

#### **I. Алгебра высказываний.**

Понятие высказывания и высказывательной формы (предиката). Операции над высказываниями. Понятие формулы алгебры высказываний. Отношение эквивалентности на множестве формул алгебры высказываний. Нормальные формы. Алгоритм построения СКН-форм и СДН-форм по таблице истинности формулы алгебры высказываний.

#### **II. Исчисление высказываний.**

Понятие исчисления. Исчисление высказываний (ИВ). Формализованный язык ИВ. Формулы ИВ. Аксиомы и правила вывода ИВ. Теорема дедукции. Полнота ИВ. Дедуктивная полнота ИВ.

Интуиционистская логика. Пример «чистого существования» и интуиционистского доказательства. Закон исключенного третьего в интуиционистской логике. Закон снятия двойного отрицания в интуиционистской логике. Аксиомы интуиционистского исчисления высказываний. Интуиционистские логические операции. Правила вывода в интуиционистской логике. Связь между классической и интуиционистской логиками.

#### **III. Приложение алгебры высказываний: релейно-контактные схемы.**

Релейно- контактные схемы. Реализация формул алгебры логики с помощью релейно-контактных схем.

#### **IV. Булева алгебра**

Определение булевой алгебры. Приложения булевой алгебры к алгебре высказываний. Операции над высказываниями (логические сложение и умножение, инверсия). Полные системы логических функций.

Понятие минтерма. Свойства минтермов. Определение СДНФ булевых функций. Теорема о СДНФ. Табличный способ нахождения СДНФ и СКНФ.

Карты Вейча. Нанесение функций на карту Вейча. Нахождение СДНФ при помощи карт Вейча. Определение равенства двух булевых функций с помощью карт Вейча. Построение инверсии булевой функции с помощью карт Вейча. Построение конъюнкции и дизъюнкции двух функций с помощью карт Вейча.

#### **V. Алгебра предикатов.**

Понятие языка алгебры предикатов. Определение операций навешивания кванторов. Понятие свободных и связанных переменных. Понятие формулы алгебры предикатов. Основные эквивалентности формул алгебры предикатов.

Предваренные нормальные формы. Алгоритм построения ПН-форм. Определение предваренной нормальной формы формулы алгебры предикатов. Скулемовская нормальная форма формулы алгебры предикатов. Проблема разрешения для алгебры предикатов. Теорема Черча.

#### **VI. Элементы теории моделей**

Понятие модели. Определение формулы модели данной сигнатуры. Определения выполнимой, истинной и ложной формулы на данной модели. Понятие значения формулы алгебры предикатов на модели. Важные примеры.



Понятия выполнимой на модели формулы алгебры предикатов, выполнимой формулы алгебры предикатов, ложной на модели формулы алгебры предикатов, невыполнимой формулы алгебры предикатов, тождественно истинной на модели формулы алгебры предикатов, общезначимой формулы алгебры предикатов.

## **VII. Интерпретации формул алгебры предикатов**

Определение интерпретации формул алгебры предикатов. Значение формулы при данной интерпретации. Классификация формул алгебры предикатов. Понятие равносильных формул. Определение логического следования для формул алгебры предикатов. Критерий логического следования. Теорема о дедукции. Правила логического вывода.

### **6 семестр**

## **VIII. Основы теории алгоритмов**

Понятие алгоритма. Неформальное определение алгоритма. Основные свойства алгоритмов. Роль алгоритмов в информатике. Алгоритмические проблемы. Проблема разрешимости. Обзор алгоритмически неразрешимых проблем: 10-я проблема Гильберта, проблема равенства в теории полугрупп.

Машины Тьюринга: определение, вычисления на машинах Тьюринга. Понятие вычислимости и вычислительные процедуры. Алгоритмически вычислимые функции. Тезис Черча-Тьюринга. Проблема остановки как одна из первых алгоритмически неразрешимых проблем.

## **IX. Теория рекурсивных функций**

Основные вычислимые операторы: суперпозиция, примитивная рекурсия и минимизация ( $\mu$ -оператор). Начальные функции. Примитивно-рекурсивные функции (ПРФ): определение, свойства, примеры.

Частично-рекурсивные функции (ЧРФ): определение, свойства, примеры. Тезис Черча. Общерекурсивные функции (ОРФ). Соотношения между классами ПРФ, ОРФ и ЧРФ.

Гёделева нумерация частично-рекурсивных функций. Универсальность,  $s$ - $m$ - $n$ -теорема. Неразрешимые проблемы. Проблема остановки для частично вычислимых функций.

## **X. Вычислимые и вычислимо перечислимые множества**

Определение вычислимо перечислимых и вычислимых множеств. Основные свойства в.п. и в. множеств. Основная теорема о вычислимо перечислимых множествах. Следствия основной теоремы. Гёделева нумерация вычислимо перечислимых множеств.

Вычислимые и вычислимо перечислимые отношения и предикаты. Кодирование  $n$ -ок. Теоремы о проекциях.

## **XI. Сводимости**

Понятие алгоритмической сводимости. Понятие степени неразрешимости относительно сводимости.  $1$ -сводимость и  $m$ -сводимость множеств: основные определения и простейшие свойства.

Машина Тьюринга с оракулом. Расширенная формализация относительной вычислимости. Релятивизованная теория вычислимых и вычислимо перечислимых множеств.

Сводимость по Тьюрингу: основные определения и простейшие свойства. Операция скачка. Некоторые важные множества и степени.



Основная профессиональная образовательная программа  
02.03.01 Математика и компьютерные науки  
(Математика и компьютерные науки)

Арифметическая иерархия множеств. Нормальные формы. Алгоритм Тарского – Куратовского.

Сводимость по перечислимости: основные определения и свойства.

### 5. Образовательные технологии

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине: технологии смешанного обучения, презентационная графика.

### 6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Предполагается выдача студентам (в текстовой или электронной форме) методических материалов (см. приложение 1), конспектов некоторых лекций, вариантов домашних заданий.

Методические материалы по данному курсу, изданные в виде учебников и монографий, находятся в библиотечных фондах ИвГУ.

Доступ к методическим материалам через ЭИОС «Мой университет»

### 7. Характеристика оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

**Входной контроль:** тест

**Цель:** выяснение уровня знаний студентов по дискретной и элементарной математике.

**Промежуточный контроль:** задания для домашних работ разного характера, контрольные работы и реферат.

**Цель:** текущий контроль освоения студентами данной дисциплины.

**Итоговый контроль:** зачет и экзамен.

**Цель:** подведение итогов освоения студентами данной дисциплины.

**Форма проведения зачета и экзамена:** письменная с учетом накопительной оценки.

### Ключевые параметры оценивания форсированности компетенций по уровням:

	<b>Пороговый уровень:</b>	<b>Продвинутый уровень:</b>
<b>Знать</b>	<i>фундаментальные понятия математической логики и теории алгоритмов.</i>	<i>нетривиальные научные результаты в области математической логики и теории алгоритмов, способность к их самостоятельному формулированию и критическому переосмыслению. Осведомленность о современных научных исследованиях и научных проблемах в области математической логики и теории алгоритмов.</i>
<b>Уметь</b>	<i>воспроизводить формулировки классических теорем математической логики, корректно формулировать естественнонаучные задачи на языке математической логики.</i>	<i>воспроизводить доказательства классических теорем математической логики. Умение формулировать научные гипотезы на языке математической логики, подтверждать или опровергать их, строить представительные модели понятия алгоритмов.</i>
<b>Владеть</b>	<i>формальным языком математической логики и</i>	<i>методами математической логики и теории алгоритмов и искусством математической</i>



Основная профессиональная образовательная программа  
02.03.01 Математика и компьютерные науки  
(Математика и компьютерные науки)

	<i>теории алгоритмов.</i>	<i>интуиции в области математической логики и ее приложений.</i>
--	---------------------------	--

Для получения на экзамене оценки «отлично» студенту необходимо достичь «продвинутого уровня», который охарактеризован в приведенной выше таблице. Для получения оценки «хорошо» студент должен владеть материалом по дисциплине на «продвинутом уровне» с некоторыми пробелами в осведомленности современных научных достижений в области математической логики и ее приложений. Для получения на экзамене оценки «удовлетворительно» студент должен достичь в изучении дисциплины порогового уровня.

Оценивание уровня подготовки студента на зачете проводится в письменной форме, предметом которого являются вопросы математической логики и теории алгоритмов, а также задачи, входящие в темы практических занятий. Для получения оценки «зачтено» необходимо знание основных понятий и классических результатов математической логики, а также умение решать основные типы задач и результат накопленной оценки не ниже 40 баллов.

При оценивании рефератов (зачтено – не зачтено) учитывается основное требование к реферату, которое состоит в том, что данная работа должна иметь реферативно-восстановительный характер, т.е. в ней должны быть улучшены или заново восстановлены доказательства известных результатов, должна быть выявлена связь между хорошо известными классическими результатами и совсем новыми результатами в данном направлении.

При оценивании заданий для домашних работ учитывается уровень трудности задачи. Задачи, решение которых носит стандартный характер, дают примерно 1/3 общей оценки. Стандартные задачи повышенной трудности дают 2/3 общей оценки. Решение задач с доказательством или с разбором различных вариантов дает общую оценку, например, «отлично».

Оценивание курсовой работы производится по системе «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» и «неудовлетворительно». Оценка зависит от степени выполнения задания на курсовую работу, которое выдается студенту в начале семестра. Задание содержит реферативную часть и ряд задач для самостоятельного решения. Оценка «удовлетворительно» ставится в случае, когда курсовая работа содержит только реферативную часть, оценка «хорошо» ставится, когда кроме реферативной части имеются самостоятельные научные результаты, «отлично» - в случае, когда задание на курсовую работу полностью выполнено и курсовая работа оформлена в соответствии с правилами оформления.

## 8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### Основная литература:

1. Успенский, В.А. Вводный курс математической логики : учебное пособие / В.А. Успенский, Н.К. Верещагин, В.Е. Плиско. - 2-е изд. - Москва : Физматлит, 2007. - 126 с. - ISBN 978-5-9221-0278-0 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=75959> (11.01.2019).
2. Лавров, И.А. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. - 5-е изд., исправл. - Москва : Физматлит, 2002. - 258 с. - ISBN 5-9221-0026-2 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=75576> (11.01.2019).

### Дополнительная литература:

3. Гиндикин, С.Г. Алгебра и логика в задачах / С.Г. Гиндикин ; ред. Ю.А. Гастев, В.В. Донченко. - Москва : Наука, 1972. - 288 с. : ил. ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=449478> (11.01.2019).
4. Лихтарников Л. М. Математическая логика: курс лекций: задачник-практикум и решения: учебное пособие / Л. М. Лихтарников, Т. Г. Сукачева - СПб. [и др.]: Лань, 2009 - 276 с.



Основная профессиональная образовательная программа  
02.03.01 Математика и компьютерные науки  
(Математика и компьютерные науки)

---

Ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

Система электронной поддержки образовательного процесса «Мой университет»  
<https://uni.ivanovo.ac.ru>

Профессиональные базы данных и информационно-справочные системы:

ЭБС «Университетская библиотека онлайн» [www.biblioclub.ru](http://www.biblioclub.ru)

Электронная библиотека ИвГУ <http://lib.ivanovo.ac.ru>

Электронный каталог НБ ИвГУ <http://lib.ivanovo.ac.ru/index.php/ek>

Программное обеспечение: операционная система Microsoft Windows, пакет офисных программ Microsoft Office и(или) LibreOffice, интернет-браузер Microsoft Edge и(или) Yandex Browser.

## **9. Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Учебные аудитории:

- для проведения занятий лекционного типа с комплектом специализированной учебной мебели и техническими средствами обучения, служащими для предоставления учебной информации большой аудитории;

- для проведения занятий семинарского типа, консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, выполнения курсовых работ (проектов) с комплектом специализированной учебной мебели и техническими средствами обучения.

Помещение для самостоятельной работы, оснащенное комплектом специализированной учебной мебели, компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в ЭИОС.

Демонстрационное оборудование и учебно-наглядные пособия для занятий лекционного типа, обеспечивающие тематические иллюстрации: презентации.



Основная профессиональная образовательная программа  
02.03.01 Математика и компьютерные науки  
(Математика и компьютерные науки)

Автор рабочей программы дисциплины: декан факультета МиКН, профессор, д.ф.-м.н. Солон Б.Я.

Программа рассмотрена и утверждена на заседании кафедры алгебры и математической логики

« 31 » августа 2017 г., протокол № 1

Программа обновлена

протокол заседания кафедры № 6 от « 2 » июня 2018 г.

Программа обновлена

протокол заседания кафедры № 1 от « 30 » августа 2019 г.

Согласовано:

Руководитель ОП Кононенко П.Г. Кононенко  
(подпись)