



Основная профессиональная образовательная программа  
01.03.01 Математика  
(Математика)

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

**ИВАНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

Кафедра алгебры и математической логики

ОДОБРЕНО:

Руководитель ОП

Н.Г. Косарев Н.Г. Косарев  
(подпись)

« 13 » июня 20 18 г.

**Рабочая программа дисциплины**  
Дополнительные главы алгебры

Уровень высшего образования:	бакалавриат
Квалификация выпускника:	бакалавр
Направление подготовки:	01.03.01 Математика
Направленность (профиль) образовательной программы:	Математика
Тип образовательной программы:	программа академического бакалавриата

Иваново



### **1. Цели освоения дисциплины «Дополнительные главы алгебры»:**

-получение студентами базовых знаний по классической теории групп и получение студентами представления о некоторых современных проблемах теории групп;

-формирование у студентов общей математической культуры, в том числе способности к осмысленному восприятию и воспроизведению абстрактных определений, теорем и их доказательств, а также способности к самостоятельным абстрактным математическим рассуждениям;

-формирование у студентов навыков научно-исследовательской работы (способности самостоятельно доказывать простые утверждения, выдвигать гипотезы, подтверждать или опровергать их, развивать математическую интуицию).

### **2. Место дисциплины в структуре ОП**

Дисциплина «Дополнительные главы алгебры» включена в вариативную часть учебного плана (Б1.В.11).

Дисциплина «Дополнительные главы алгебры» создаёт базу для научной работы студентов в рамках написания квалификационных работ. На этой дисциплине основаны все магистерские курсы алгебраического цикла и все дисциплины алгебраического цикла для аспирантов, работающих по научной специальности 01.01.06 – Математическая логика алгебра и теория чисел.

Дисциплина «Дополнительные главы алгебры» опирается на дисциплину «Алгебра».

Для успешного изучения дисциплины «Дополнительные главы алгебры» необходимы следующие «первоначальные» знания и умения в области абстрактных алгебраических систем, и, в частности, в области теории групп, полученные в процессе освоения дисциплины «Алгебра»:

**знать** теорию групп и колец в объеме, предусмотренном рабочей программой курса «Алгебра»,

**уметь** приводить примеры групп, иллюстрировать на этих примерах основные понятия теории групп,

**владеть** навыками рассуждений и доказательств в области абстрактной алгебры.

### **3. Планируемые результаты обучения по дисциплине**

#### **3.1. Компетенции, формированию которых способствует дисциплина**

Учебным планом при освоении данной дисциплины предусмотрено формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО по данному направлению подготовки:

- общепрофессиональные (ОПК):

ОПК-1. Готовность использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в будущей профессиональной деятельности;

ОПК-2. Способность решать стандартные задачи профессиональной деятельности на основе информационной и библиографической культуры с применением информационно-коммуникационных технологий и с учетом основных требований информационной безопасности.

- профессиональные (ПК):

ПК-1. Способность к определению общих форм и закономерностей отдельной предметной области.



ПК-2. Способность математически корректно ставить естественнонаучные задачи, знание постановок классических задач математики.

ПК-3. Способность строго доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата.

### **3.2. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с формируемыми компетенциями**

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

**Знать:** фундаментальные понятия и классические результаты (теоремы) с доказательствами по следующим разделам теории групп: общие вопросы теории групп (включая разложение группы по подгруппе, фактор-группы, теоремы о гомоморфизмах и изоморфизмах групп, автоморфизмы групп, классы сопряженности, центр и коммутант группы, действие группы на множестве), основы теории конечных групп (включая теоремы Лагранжа и Силова), теорию абелевых групп, теорию разрешимых групп (ОПК-1, ПК-1, ПК-3). По каждому из перечисленных выше разделов теории групп иметь представление о научных задачах (ПК-2).

**Уметь:** осмысленно воспринимать и воспроизводить абстрактные определения, теоремы и доказательства (ПК-3), логически мыслить, самостоятельно рассуждать и доказывать простые утверждения в области теории групп (ПК-3), устанавливать логические связи между понятиями, корректно формулировать и осмысленно решать учебные задачи теоретического характера, а также задачи, связанные с конкретными примерами групп (ПК-2).

**Владеть:** достаточным уровнем математической культуры, навыками самостоятельной исследовательской работы в области теории групп на основе глубоких знаний и постоянных размышлений над теоретико-групповой задачей (или проблемой) (ПК-2, ПК-1), определенным уровнем математической интуиции, достаточным уровнем информационной и библиографической культуры в процессе поиска необходимой информации (ОПК-2).

### **4. Объем и содержание дисциплины**

Объем дисциплины составляет 3 зачетных единицы (108 академических часов).

#### **4.1. Содержание дисциплины по разделам (темам), соотнесенное с видами и трудоемкостью занятий лекционно-семинарского типа**

Объем иной контактной работы и самостоятельной работы обучающегося по дисциплине указан в учебном плане образовательной программы.



Основная профессиональная образовательная программа  
01.03.01 Математика  
(Математика)

№ п/п	Разделы (темы) дисциплины	Семестр	Виды занятий, их объем (в ак. часах, по очной форме обучения)		Формы текущего контроля успеваемости (по очной форме обучения)
			Занятия лекцион- ного типа	Занятия семинар- ского типа	Формы промежуточной аттестации
1	Общие вопросы	8	2	2	Зачет
2	Циклические группы и системы порождающих	2	2	2	
3	Смежные классы группы по подгруппе	8	26	24	
4	Фактор-группы и гомоморфизмы групп	8	2	2	
5	Прямые произведения групп	8	2	2	
6	Строение конечно порожденной абелевой группы	8	2	2	
7	Центр и коммутант группы, классы сопряженности	8	2	2	
8	Сопряженные подмножества и подгруппы, действие группы на множестве	8	2	2	
9	Конечные группы	8	2	2	
10	Автоморфизмы и эндоморфизмы групп	8	2	2	
11	Расщепляемые расширения групп	8	2	2	
12	Нормальные и субнормальные ряды, разрешимые и полициклические группы	8	2	2	
Итого за 8-й семестр			24	24	
Итого по дисциплине			24	24	

#### 4.2. Развернутое описание содержания дисциплины по разделам (темам)

**Тема 1. Общие вопросы.** Полугруппы. Моноиды. Обратимые элементы моноида. Равносильные определения группы. Квазициклическая группа и проблема Шмидта. Группа биактивных преобразований множества и группа подстановок. Группы биактивных преобразований в геометрии. Гомоморфизмы групп, их свойства. Ядро и образ гомоморфизма. Первая теорема о гомоморфизмах групп. Изоморфные группы. Абстрактные свойства групп. Теорема Кэли о вложении произвольной группы в группу преобразований. Линейные группы. Вложение произвольной конечной группы в общую линейную группу.

**Тема 2. Циклические группы и системы образующих.** Порядок элемента группы, его свойства. Выражение порядка степени элемента через порядок этого элемента. Циклическая подгруппа и совпадение её порядка с порядком порождающего элемента. Циклические группы и их описание с точностью до изоморфизма. Теорема о подгруппах циклической группы. Квазициклическая группа и описание её подгрупп. Подгруппы, порождённые множеством элементов – равносильные определения. Системы образующих в группах. Примеры порождающих множеств в группе подстановок и в группе чётных подстановок. Конечно порождённые группы. Локальная цикличность группы  $Q$ . Группы конечного общего ранга.



Группы конечного специального ранга. Ранг абелевой группы. Описание абелевых групп без кручения ранга 1.

**Тема 3. Смежные классы группы по подгруппе.** Отношение сравнимости по модулю подгруппы. Левые и правые смежные классы группы  $G$  по подгруппе  $H$  как классы сравнимости и как множества вида  $xH$  и  $Hx$ . Равномощность множества всех левых и множества всех правых смежных классов группы по подгруппе. Индекс подгруппы. Теорема Лагранжа о конечных группах. Теорема Эйлера и другие следствия из теоремы Лагранжа. Свойство транзитивности для подгрупп конечного индекса. Теорема Пуанкаре о подгруппах конечного индекса как обобщение теоремы Лагранжа.

**Тема 4. Фактор-группы и гомоморфизмы групп.** Равносильные определения нормальной подгруппы. Нормальность подгруппы индекса 2. Фактор-группа и естественный гомоморфизм. Нормальные подгруппы как ядра групповых гомоморфизмов. Вторая теорема о гомоморфизмах групп. Изоморфное представление квазициклической группы как фактор-группы группы  $p$ -ичных дробей по подгруппе целых чисел. Другие примеры, иллюстрирующие вторую теорему о гомоморфизмах групп. Теорема о соответствии подгрупп при эпиморфизме и как следствие теорема о соответствии подгрупп при естественном гомоморфизме. Применение теоремы о соответствии подгрупп при естественном гомоморфизме к описанию подгрупп группы целочисленных вычетов. Теоремы об изоморфизмах групп.

**Тема 5. Прямые произведения групп.** Внешнее и внутреннее прямое произведение конечного числа групп. Связь между этими понятиями и их обобщение на случай бесконечного числа групп. Теорема Ремака. Неразложимые группы. Разложение периодической абелевой группы в прямое произведение примарных компонент.

**Тема 6. Строение конечно порождённой абелевой группы.** Теорема о строении конечной абелевой группы и её следствие – теорема о цикличности мультипликативной группы конечного поля. Теорема о строении конечно порождённой абелевой группы. Свободные абелевы группы.

**Тема 7. Центр группы и коммутант группы, классы сопряжённости.** Коммутант и центр группы, их вычисление в симметрической и знакопеременной группе, а также в матричных группах. Классы сопряжённости. Описание классов сопряжённости в группах подстановок. Центризатор элемента группы и совпадение его индекса в данной группе с мощностью класса сопряжённости, содержащего этот элемент. Совпадение порядка конечной неабелевой группы с суммой порядка её центра и индексов некоторых её собственных подгрупп. Необратимость теоремы Лагранжа о конечных группах. Теорема Силова о существовании в конечной группе подгрупп примарных порядков. Нетривиальность центра конечной  $p$ -группы. Описание конечных групп малых порядков.

**Тема 8. Сопряженные подмножества и подгруппы, действие группы на множестве.** Сопряженные подмножества и подгруппы. Нормализатор подмножества. Совпадение числа всех подмножеств группы  $G$ , сопряженных с подмножеством  $M$ , и индексом нормализатора подмножества  $M$  в группе  $G$ . Действие группы на множестве и сопровождающий гомоморфизм. Примеры действий – действие сопряжениями и правыми сдвигами. Орбиты и стабилизаторы. Транзитивные действия. Совпадение мощности орбиты с индексом стабилизатора любого элемента этой орбиты. Теорема М. Холла о конечности числа подгрупп данного конечного индекса в конечно порождённой группе.

**Тема 9. Конечные группы.** Первая, вторая и третья теоремы Силова, понятие силовой  $p$ -подгруппы конечной группы. Примеры конечных простых групп и теорема Галуа.

**Тема 10. Автоморфизмы и эндоморфизмы групп.** Группа автоморфизмов группы. Группа внутренних автоморфизмов группы  $G$  как нормальная подгруппа в группе автоморфизмов группы  $G$ . Изоморфизм между группой внутренних автоморфизмов группы  $G$  и фактор-группой группы  $G$  по её центру. Совершенные группы и теорема Гёльдера. Эндоморфизмы групп. Кольцо эндоморфизмов абелевой группы. Характеристические и вполне характеристические подгруппы.



Простые свойства характеристических подгрупп. Гомоморфизм индуцирования группы автоморфизмов группы  $G$  в группу автоморфизмов фактор-группы группы  $G$  по её характеристической подгруппе.

**Тема 11. Расщепляемые расширения групп.** Понятие расширения. Расщепляемое расширение группы и сопровождающий гомоморфизм. Задание расщепляемого расширения с помощью сопровождающего гомоморфизма. Голоморф. Расщепляемость расширения с помощью бесконечной циклической группы. Описание всех конечных групп, порядки которых раскладываются в произведение двух простых чисел.

**Тема 12. Нормальные и субнормальные ряды, разрешимые и полициклические группы.** Нормальные и субнормальные ряды в группах. Переход от нормального (субнормального) ряда в группе к соответствующему ряду на подгруппе и на фактор-группе. Уплотнения рядов. Теоремы Шрейера и Жордана – Гёльдера об уплотнениях. Разрешимые группы их равносильные определения и простые свойства. Полициклические группы, их свойства. Ранг Гирша полициклической группы. Полициклические группы как разрешимые группы с условием максимальности для подгрупп.

## 5. Образовательные технологии

Технология проблемного обучения – демонстрация на лекциях и практических занятиях проблемных ситуаций. Рассматриваются некоторые недавно решенные научные проблемы. Проблемы учебного характера как правило формулируются в виде задач и решаются студентами самостоятельно и на практических занятиях под руководством и при поддержке преподавателя. Решение каждой задачи должно иметь четкую логическую структуру, содержать необходимые доказательства, пояснения, комментарии, ссылки на теоретические факты.

Информационные технологии: технологии смешанного обучения, использование компьютерных презентаций, обеспечение студентов текстами лекций в электронной форме.

## 6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа студентов состоит в следующем: еженедельная работа с рукописными и электронными конспектами лекций (материалы выдаются студентам по мере необходимости), изучение литературы указанной в разделе 8 рабочей программы, выполнение домашних заданий (задания выдаются на каждом практическом занятии, и, при необходимости, в системе электронной поддержки образовательного процесса «Мой университет» <https://uni.ivanovo.ac.ru>), подготовка к решению задач, предлагаемых на зачете (разработаны комплекты типовых задач), подготовка к зачету (вопросы и другие материалы для сдачи зачета доступны каждому студенту как в бумажном виде (в ауд. 326 первого уч. корпуса) так и в системе «Мой университет»). Методические пособия по данному курсу находятся в библиотечных фондах ИвГУ, их выходные данные представлены в **приложениях** к рабочей программе. Там же представлены и другие методические материалы по данной дисциплине.

## 7. Характеристика оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Итоговой формой контроля является устный зачет. Студенту предлагается вопрос (вопросы) теоретического характера и задача теоретического характера, которая состоит в самостоятельном доказательстве несложного теоретико-группового утверждения.

Если студент демонстрирует знание основных понятий и классических результатов теории групп, входящих в программу зачета, умеет воспроизводить доказательства фундаментальных теорем теории групп и решил предложенную ему задачу (самостоятельно доказал несложное теоретико-групповое утверждение), то ему выставляется итоговая оценка «зачтено» по данной дисциплине.



## 8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

Основная литература:

1. Кострикин, А.И. Введение в алгебру : учебник / А.И. Кострикин. - М. : МЦНМО, 2009. - Ч. 1. Основы алгебры. - 273 с. - ISBN 978-5-94057-453-8 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63140>
2. Кострикин, А.И. Введение в алгебру : учебник / А.И. Кострикин. - М. : МЦНМО, 2009. - Ч. 2. Линейная алгебра. - 368 с. - ISBN 978-5-94057-454-5 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63144>
3. Кострикин, А.И. Введение в алгебру : учебник / А.И. Кострикин. - М. : МЦНМО, 2009. - Ч. 3. Основные структуры алгебры. - 272 с. - ISBN 978-5-94057-455-2 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=62951>
3. Кострикин А. И. Введение в алгебру. М.: Наука, 1977.- 495 с. 108 экземпляров.
4. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. 11-е изд, стереотип. – М.: Наука, 1975. 43 экземпляра.
5. Фаддеев Д. К. Сборник задач по высшей алгебре. - 11 –е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1977. – 288 с. 120 экземпляров.
6. Яцкин Н. И. Алгебра: Теоремы и алгоритмы: Учеб. пособие. Иваново: ИвГУ, 2008. – 606 с. – 98 экз.

Дополнительная литература:

1. Сборник задач по алгебре : задачник / под ред. А.И. Кострикин. - М. : МЦНМО, 2009. - 404 с. - ISBN 978-5-94057-413-2 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63274>

Ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

Система электронной поддержки образовательного процесса «Мой университет»  
<https://uni.ivanovo.ac.ru>

Общероссийский математический портал <http://www.mathnet.ru/>

Профессиональные базы данных и информационно-справочные системы:

ЭБС «Университетская библиотека онлайн» [www.biblioclub.ru](http://www.biblioclub.ru)

Электронная библиотека ИвГУ <http://lib.ivanovo.ac.ru>

Электронный каталог НБ ИвГУ <http://lib.ivanovo.ac.ru/index.php/ek>

Программное обеспечение: операционная система Microsoft Windows, пакет офисных программ Microsoft Office и(или) LibreOffice, интернет-браузер Microsoft Edge и(или) Yandex Browser.

## 9. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Учебные аудитории:

- для проведения занятий лекционного типа с комплектом специализированной учебной мебели и техническими средствами обучения, служащими для предоставления учебной информации большой аудитории;
- для проведения занятий семинарского типа, консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации с комплектом специализированной учебной мебели и техническими средствами обучения;

Помещение для самостоятельной работы, оснащенное комплектом специализированной учебной мебели, компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в ЭИОС.

Демонстрационное оборудование: доска, проектор для презентаций.



Основная профессиональная образовательная программа  
01.03.01 Математика  
(Математика)

---

**Автор(ы) рабочей программы дисциплины:** профессор кафедры алгебры и математической логики ИВГУ, доктор физико-математических наук Азаров Дмитрий Николаевич

Программа рассмотрена и утверждена на заседании кафедры алгебры и математической логики

«29» августа 20 16 г., протокол № 1

Программа обновлена  
протокол заседания кафедры № 1 от «31» августа 20 18 г.

Программа обновлена  
протокол заседания кафедры № 6 от «2» июня 20 18 г.

Программа обновлена  
протокол заседания кафедры № 1 от «30» августа 20 19 г..

Согласовано:

Руководитель ОП

  
(подпись)

П.Г. Кононенко