Разбор решения задач муниципального этапа всероссийской олимпиады по математике, 2022 год

10 класс

Общие критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Задача 1

1. **Решить неравенство**

$$1^x + 2^x + 3^x + \cdots + 2022^x < 2022$$

Ответ: $x \in (-\infty, 0)$

Решение. **Заметим, что ОДЗ для неизвестной** $x \in (-\infty, +\infty)$.
Рассмотрим уравнение

$$1^x + 2^x + 3^x + \cdots + 2022^x = 2022$$

Пусть $y = 1^x + 2^x + 3^x + \cdots + 2022^x$, **эта функция представляет собой сумму показательных функций (кроме** $1^x \equiv 1$**) с основанием** $a > 1$ **и является возрастающей функций как сумма возрастающих функций. Правая часть этого уравнения является функцией–константой** $y = 2022$, **следовательно, данное уравнение если имеет решение, то оно единственное. Очевидно, что** $x = 0$ **является единственным его решением.**

Так как для возрастающей функции

$$f(x) = 1^x + 2^x + 3^x + \cdots + 2022^x - 2022$$

значение $x = 0$ **является нулем, то** $x < 0 \to f(x) < 0$ **и** $x > 0 \to f(x) > 0$.

Переходя к неравенству, получаем его решение $x \in (-\infty, 0)$.

Критерий оценивания задачи 1

- Обоснованное верное решение – 7 баллов.
- Только верный ответ – 2 балла
- Введена функция $f(x) = 1^x + 2^x + 3^x + \cdots + 2022^x - 2022$, найдены ее значения для $x < 0$ и $x > 0$, но не доказано её возрастание – 4 балла.

Задача 2

Клетки квадратной таблицы $\mathbf{15 \times 15}$ ***раскрашены в красный, синий и зеленый цвета. Доказать, что найдутся, по крайней мере, две строки, в которых клеток хотя бы одного цвета поровну.***

Решение. **Предположим, что это неверно, т.е. в любых двух строках разное число клеток одного цвета. Тогда, в любых двух строках разное число клеток красного цвета, а всего их тогда не менее 0+1+2+…+14=105. Аналогично, для синих и зеленых клеток. Тогда в таблице должно быть не менее** $\mathbf{3 \cdot 105 = 315}$ **клеток, в то время как в ней всего** $\mathbf{15 \times 15 = 225}$ **клеток. Получили противоречие, следовательно, найдутся, по крайней мере, две строки, в которых клеток хотя бы одного цвета поровну.**

Критерий оценивания задачи 2

- Обоснованное верное решение – 7 баллов.
- Сделана попытка подсчитать число закрашенных клеток, но доказательства не получилось – 2 балла
- Сделано предположение, что утверждение в задаче неверное и начат подсчет закрашенных клеток в этом случае, но противоречия не получено – 5 баллов.

Задача 3

1. ***В правильном n −угольнике ($n \geq 8$) наугад выбираются две четверки различных вершин. Какова вероятность того, что два четырехугольника, с вершинами в выбранных четверках, не пересекаются?***
   Ответ: $\frac{4}{35}$

Решение. Разобьём все возможные пары четверок вершин данного n −угольнике ($n \geq 8$) на C_n^8 групп, собирая в одной группе те и только те пары четверок, которые образуют пары четырехугольников с вершинами из этой группы. С одной стороны, каждая такая группа содержит столько элементов, сколькими способами можно разбить восьмерку фиксированных вершин на две четверки, т.е.

$$C_8^4 = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = 70$$

С другой стороны, существует ровно 8 способов разбить восьмерку на две четверки, удовлетворяющие требуемому в задаче условию. Поэтому искомая вероятность равна числу $p = \frac{8}{70} = \frac{4}{35}$

Критерий оценивания задачи 3

- Обоснованное верное решение – 7 баллов.
- Только верный ответ – 2 балла
- Выделена группа восьмерок вершин, которые образуют пары четырехугольников с вершинами из этой группы. - 3 балла.
- Найдено число пар четырехугольников с вершинами в выделенной группе из 8 вершин, но не найдена искомая вероятность – 5 баллов.
- Ход решения верный, но при вычислениях допущена арифметическая ошибка – вычесть 1 балл из оценки, которую бы поставили, если бы ошибки не было.

Задача 4

1. ***Какое число больше***

$$2^{3^{100}} \text{ или } 3^{2^{150}}?$$

***Ответ*: первое**

***Решение.* Операции в башне выполняются сверху вниз, т.е. нужно найти знак неравенства между числами**

$$2^{\left(3^{100}\right)} \vee 3^{\left(2^{150}\right)}$$

Возведем обе части сравнения в степень $\frac{1}{2^{150}}$:

$$2^{\left(3^{100}\right)^{\frac{1}{2^{150}}}} \vee 3^{\left(2^{150}\right)^{\frac{1}{2^{150}}}}$$

При возведении степени в степень показатели перемножаются. В результате получим

$$2^{\frac{3^{100}}{2^{150}}} \vee 3$$

Перепишем показатель степени $2^{\frac{3^{100}}{2^{150}}}$ в виде $2^{\frac{3^{2\cdot 50}}{2^{3\cdot 50}}}$ и далее $2^{\frac{\left(3^2\right)^{50}}{\left(2^3\right)^{50}}} = 2^{\left(\frac{9}{8}\right)^{50}}$

Продолжение задачи 4

Применим неравенство Бернулли $(1+a)^n > 1+na$ к степени $\left(\frac{9}{8}\right)^{50}$:

$$\left(\frac{9}{8}\right)^{50} = \left(1+\frac{1}{8}\right)^{50} > 1+\frac{50}{8} > 2$$

Итак, после преобразований имеем цепочку неравенств

$$2^{\frac{3^{100}}{2^{150}}} = 2^{\left(\frac{9}{8}\right)^{50}} > 2^2 = 4 > 3$$

Откуда следует, что $2^{\left(3^{100}\right)} > 3^{\left(2^{150}\right)}$

Критерий оценивания задачи 4

- Обоснованное верное решение – 7 баллов.
- Только верный ответ – 2 балла
- Оба числа возводятся в степень $\frac{1}{2^{150}}$ - 3 балла.
- Сделаны преобразования до прямого использования неравенства Бернулли – 5 баллов.
- Ход решения верный, но при вычислениях допущена арифметическая ошибка – вычесть 1 балл из оценки, которую бы поставили, если бы ошибки не было.

Задача 5

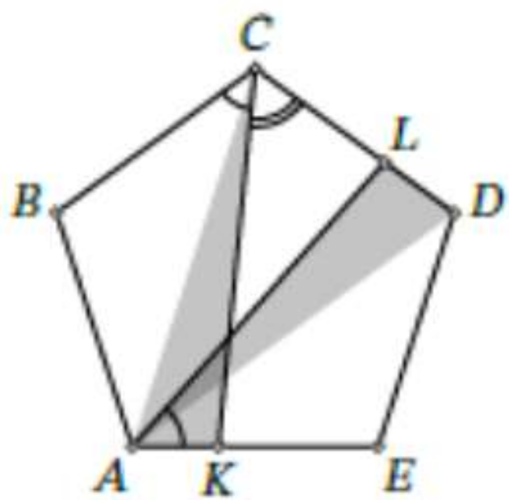
Дан правильный пятиугольник $ABCDE$. На стороне AE отмечена точка K, на стороне CD — точка L. Известно, что $\angle LAE + \angle KCD = 108^\circ$, $AK : KE = 3 : 7$. Найти $CL : AB$.

Ответ: 0,7.

Решение. Для начала сформулируем известные факты, которыми нужно пользоваться в решении.

- Сумма углов n-угольника равна $180^\circ(n - 2)$. В частности, каждый угол правильного пятиугольника равен $540^\circ : 5 = 108^\circ$.
- Все пять диагоналей правильного пятиугольника равны. Также каждая диагональ отсекает от пятиугольника равнобедренный треугольник с углом 108° при вершине и углами 36° при основании.

Продолжение задачи 5



Пусть $\angle LAE = \alpha$, тогда $\angle KCD = 108^\circ - \alpha$ и $\angle BCK = \alpha$ (см. рис.). Заметим, что $\angle CKA = 360^\circ - \angle KAB - \angle ABC - \angle BCK = 360^\circ - 108^\circ - 108^\circ - \alpha =$ $= 360^\circ - \angle LDE - \angle DEA - \angle EAL = \angle ALD$. Докажем, что треугольники ALD и CKA равны. Равенство одной пары углов у нас уже есть. Далее, $\angle ADL =$ $\angle CDE - \angle ADE = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$; так же получается $\angle CAK = 72^\circ$, так как это аналогичный угол между диагональю и стороной пятиугольника. Тогда равны и третьи углы треугольников. Значит, треугольники ALD и CKA равны по стороне $AD = AC$ и прилежащим к ней углам; отсюда следует $LD = AK$.

Обозначив длину AK за $3x$, имеем $KE = 7x$ из условия и $AE = AK + KE = 10x$. Кроме того, $CD = AB = AE$, так как это стороны пятиугольника. Получаем, что $CL = CD - LD = 7x$. Наконец, $CL : AB = 7x : 10x = 0{,}7$.

Продолжение задачи 5

Замечание. Равенство треугольников можно установить, рассмотрев поворот на 144° вокруг центра пятиугольника, который переводит точку C в точку A. Из равенства углов, данного в условии, следует, что угол BCK перейдёт в EAL и отрезок CK в отрезок AL; тогда совместятся и треугольники.

Критерий оценивания задачи 5

- Верное обоснованное решение –7 баллов
- Доказано равенство треугольников ALD и CKA, но не получен верный ответ - от 3 до 5 баллов
- Сделан рисунок и установлено равенство некоторых углов , ответ не получен - до 2 баллов